EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
AMERSFOORT

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. C. DE JONG,
LEIDEN

Dr. W. P. THIJSEN
BANDOENG

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

14e JAARGANG 1937/38, Nr. 2 en 3.



P. NOORDHOFF — N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde f 5.—, voor id. op Christiaan Huygens f 4.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—, voor idem op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) *f* 4.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

☞ Bij de verzending van pres. ex. van de *tweede* druk (thans derde) van de Schooltafel is een prosp. van ongeveer 3 blz. bijgevoegd. Men zal mij zeer verplichten met toezending van dat prosp.; noch de uitgever, noch ik, hebben een ex. meer. P. W.

INHOUD.

verandering van E door den inhoud van het eerste lichaam kan worden aangenomen; aan deze waarde is de inhoud van het tweede dan als bovenste grens gebonden.

Er wordt nu bewezen, dat het lichaam met basis (BE) en hoogte AE een maximum-inhoud bereikt, wanneer $BE = 2.AE$. Construeeren we nl. de bovenbedoelde krommen opnieuw voor het punt E_0, dat aan deze voorwaarde voldoet, dan ligt het bijbehoorende punt K_0 op een parabool met diameter HZ_0 en latus rectum HM_0, zoodat

$$\mathbf{T}(Z_0K_0) = \mathbf{O}(Z_0H, HM_0)$$

en bovendien op de boven reeds vermelde orthogonale hyperbool.

Men toont nu aan, dat de parabool HK_0 deze hyperbool in K_0 raakt.

Maak, om dit te bewijzen, op het verlengde van Z_0H, $H\Xi = HZ_0$, dan is wegens een bekende eigenschap van de raaklijn van een parabool (III; 2,2), ΞK_0 raaklijn van de parabool in K_0. Snijdt nu verder ΞK_0 de asymptoot $\Gamma\Theta$ in O, dan is wegens $BE_0 = 2.AE_0$, blijkbaar $K_0\Pi = K_0O$, zoodat de lijn ΠO op grond van een eigenschap van de raaklijn eener hyperbool (III; 5,43) deze kromme in K_0 raakt. Hierdoor is het gestelde bewezen.

De hyperbooltak $BK_0 \ldots$ ligt dus in de figuur geheel aan één zijde van de parabool $HK \ldots$ Is dus E een willekeurig punt van AB (in de figuur tusschen B en E_0 gekozen), snijdt de loodlijn door E op AB de hyperbool in K, en de lijn ZK, parallel aan AB, de parabool HK_0 in N, dan blijkt

$$ZK < ZN.$$

Nu ligt K op de orthogonale hyperbool; daaruit volgt de gelijkheid der rechthoeken $K\Gamma$ en $B\Gamma$, dus ook die der rechthoeken KA en $B\Lambda$; wegens het omgekeerde van Euclides I, 43 liggen nu de punten Γ, E en Z op één rechte.

Nu was te bewijzen

$$\Sigma[\mathbf{T}(BE), AE] < \Sigma[\mathbf{T}(BE_0), AE_0] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\zeta)$$

of, als we de bijzondere waarde van het gegeven oppervlak Δ, die bij gegeven $A\Gamma$ aanleiding geeft tot het vinden van het punt E_0, Δ_0 noemen,

$$\Sigma[\Delta, A\Gamma] < \Sigma[\Delta_0, A\Gamma].$$

Hierin is echter

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{O}(H\Gamma, HM) \text{ en } \mathbf{\Delta}_0 = \mathbf{O}(H\Gamma, HM_0)$$

terwijl

$$\mathbf{T}(ZK) = \mathbf{O}(HZ, HM) \text{ en } \mathbf{T}(ZN) = \mathbf{O}(HZ, HM_0).$$

Wegens $ZK < ZN$ is nu $HM < HM_0$, dus $\mathbf{\Delta} < \mathbf{\Delta}_0$, waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Voor een punt E tusschen E_0 en A verloopt het bewijs op dezelfde manier.

De gevonden diorismos wordt nu in de synthese als volgt toegepast.

Bepaal eerst E_0, zoodat $BE_0 = 2.AE_0$. Is nu

$$\Sigma[\mathbf{\Delta}, A\Gamma] \left.\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} \Sigma[\mathbf{T}(BE_0), AE_0]$$

> dan is er geen oplossing.
= dan is E_0 het gevraagde punt.
< bepaal dan het punt M, zoodat $\mathbf{\Delta} = \mathbf{O}(H\Gamma, HM)$.

Construeer de parabool met diameter HZ en latus rectum HM, de orthogonale hyperbool door B met asymptoten ΓH en $\Gamma\Theta$ en bepaal het snijpunt K dezer twee krommen, dat aan denzelfden kant van E_0K_0 ligt als H. Het gevraagde punt E wordt dan verkregen, door uit K een loodlijn op AB neer te laten.

De gevonden methode is nu toe te passen in het vraagstuk, dat Archimedes in Propositie 4 gesteld heeft. Daartoe moet voor AB uit de algemeene behandeling het lijnstuk $Z\varDelta = 3R$ van fig. 82 genomen worden. $A\Gamma$ moet door $Z\Theta$ van fig. 82 vervangen worden, $\mathbf{\Delta}$ gelijk aan $\mathbf{T}(B\varDelta)$ genomen worden. Nu wordt $BE_0 = 2R$, $AE_0 = R$. Wegens $Z\Theta < R$ is nu

$$\Sigma[\mathbf{\Delta}, A\Gamma] = \Sigma[\mathbf{T}(2R), Z\Theta] < \Sigma[\mathbf{T}(2R), R]$$

zoodat aan de voorwaarde van oplosbaarheid, die in de algemeene behandeling is afgeleid, voldaan is.

We hebben de geheele redeneering opzettelijk in zuiver klassieken vorm weergegeven. Ter verduidelijking moge nu haar vertaling in de symboliek der algebra volgen:

Stellen we (weer in het algemeene probleem) $AB = a$, $BE = x$, $A\Gamma = p$, $\mathbf{\Delta} = q^2$ dan luidt de vergelijking van het probleem (zie (γ))

$$\frac{a - x}{p} = \frac{q^2}{x^2} \text{ of } x^2(a - x) = pq^2 \text{ of } x^3 - ax^2 + pq^2 = 0. \qquad (\varepsilon)$$

De Grieksche oplossing komt nu hierop neer, dat men elk der beide leden van

$$\frac{a-x}{p}=\frac{q^2}{x^2}$$

gelijk stelt aan

$\frac{a}{y}$ conform betrekking (δ), waarin $HZ = y$.

Men heeft nu de twee vergelijkingen

$$y\,(a-x)=ap \text{ en } x^2=\frac{q^2}{a}.y$$

die opv. de orthogonale hyperbool en de parabool voorstellen, die Archimedes gebruikt. De abscissen van de snijpunten dezer twee krommen stellen de oplossingen van de vergelijking (ε) voor. De gevonden waarden van x zullen echter in het meetkundige vraagstuk II, 4 van Archimedes slechts dan bruikbaar zijn, wanneer ze voldoen aan de betrekking

$$0<x<\tfrac{2}{3}a, \text{ omdat } x<2R \text{ moet zijn en } a=3R \text{ is.}$$

Om het aantal wortels te beoordeelen, berekenen we den discriminant

$$\mathbf{D}=-[27\,pq^2-4a^3]\,pq^2$$

waaruit blijkt:

Is $pq^2<\frac{4}{27}a^3$, dan zijn er drie reëele wortels; daar hun product $-pq^2$ bedraagt en dus negatief is, terwijl de som a positief is, is een van deze wortels negatief en zijn de andere twee positief.

Is $pq^2=\frac{4}{27}a^3$, dan vallen de twee positieve wortels samen.

Is $pq^2>\frac{4}{27}a^3$, dan is er slechts een reëele wortel en deze is negatief.

Daar in het door Archimedes behandelde vraagstuk alleen positieve wortels bruikbaar zijn, is een noodige voorwaarde

$$pq^2<\tfrac{4}{27}a^3.$$

Deze voorwaarde is identiek met de door Archimedes afgeleide voorwaarde (ζ). Immers

$$pq^2=x^2\,(a-x)$$

welke laatste vorm haar maximum, groot $\frac{4}{27}a^3$, voor $x=\frac{2}{3}a$ bereikt.

Van de twee positieve wortels, die in het geval

$$pq^2<\tfrac{4}{27}a^3$$

aan de vergelijking voldoen en die correspondeeren met de twee snijpunten van hyperbool en parabool, welke positieve abscissen hebben, is in het bijzondere geval, dat zich in II, 4 voldoet, slechts een bruikbaar, namelijk diegene, die kleiner is dan $\frac{2}{3}a$.

Dat er steeds en slechts één zulk een wortel is, is voor de meetkundige aanschouwing duidelijk: van de twee snijpunten van parabool en orthogonale hyperbool, die positieve abscissen hebben, ligt één links en één rechts van de lijn K_0E_0.

Algebraisch blijkt hetzelfde, doordat de vorm

$$x^3 - ax^2 + pq^2$$

een nulpunt blijkt te hebben tusschen $x = 0$ en $x = \frac{2}{3}a$ en een tusschen $x = \frac{2}{3}a$ en $x = a$.

Eutokios vermeldt nog twee andere oplossingen van de propositie **S.C.** II, 4 [7]). In de eerste, die van Dionysodoros [8]) afkomstig is, wordt eerst (langs anderen weg dan bij Archimedes) het gestelde vraagstuk teruggebracht tot den vorm (3). De oplossing (overgebracht in de notatie van II, 4) verloopt dan echter verder als volgt:

Maak (fig. 82)

$$\mathbf{O}(ZX, Z\Theta) = \mathbf{T}(MX) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

dan is wegens (8):

$$[\mathbf{T}(MX), \mathbf{T}(Z\Theta)] = (ZX, Z\Theta) = [\mathbf{T}(B\Delta), \mathbf{T}(X\Delta)]$$

dus

$$(MX, Z\Theta) = (B\Delta, X\Delta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Hierin stelt (α) een parabool voor met top Z, as $Z\Delta$ en latus rectum $Z\Theta$, (β) een orthogonale hyperbool met centrum Δ, waarvan de asymptoten zijn ΔZ en de loodlijn, door Δ op ΔB opgericht. X wordt nu bepaald als voetpunt van de ordinaat van een snijpunt M dezer twee krommen

Algebraisch beduidt dit in de boven ingevoerde notatie, dat men ter oplossing van de vergelijking

$$\frac{a - x}{p} = \frac{q^2}{x^2}$$

---

7) *Opera* III, 152 seq. en 160 seq.

8) Waarschijnlijk Dionysodoros van Kaunos, die een tijdgenoot van Apollonios was. Vermoedelijk is hij de schrijver van een werk *περί τῆς σπείρας* (over den torus), dat door Heroon (*Metrika* II, 13, *Heronis Opera* III, 128) geciteerd wordt. Hij leidt daarin een uitdrukking voor den inhoud van een torus af.

E R R A T A

E u c l i d e s - bladzijde 136
9de en 10de regel rechts moet zijn:

$$a_n < Am$$

$$a_n - A < A(m - 1) \quad (3)$$

stelt

$$y^2 = p\,(a - x)$$

zoodat

$$\frac{y}{p} = \frac{q}{x}.$$

Men heeft nu de snijpunten te bepalen van de parabool

$$y^2 = p\,(a - x)$$

en de orthogonale hyperbool

$$xy = pq.$$

In de tweede oplossing, die door Diokles [9]) is aangegeven, wordt het probleem ten opzichte van Archimedes nog eenigszins gegeneraliseerd. Bij Archimedes werden nl. bij de gegeven punten B en Δ de punten P en Λ bepaald door de betrekkingen (fig. 82):

$$(PB, BX) = (R, X\Delta) \text{ en } (\Lambda\Delta, \Delta X) = (R, XB)$$

terwijl dan X moest voldoen aan de voorwaarde

$$(PX, \Lambda X) = \text{gegeven verhouding.}$$

Bij Diokles wordt nu in de beide eerste betrekkingen R vervangen door een willekeurig lijnstuk, dat geen verband meer heeft met de grootte van $B\Delta$. Opnieuw geformuleerd luidt het probleem nu als volgt (fig. 84):

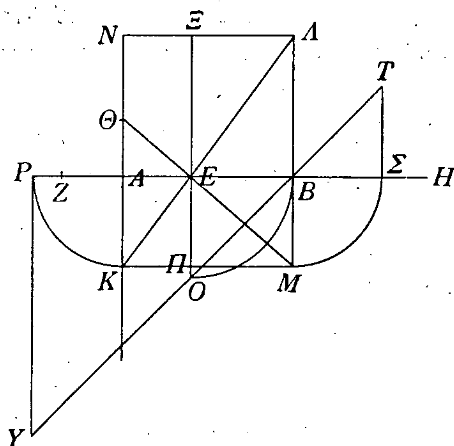


Fig. 84.

---

[9]) Diokles leefde vermoedelijk ca. 100 v. Chr. Hij is tegenwoordig nog bekend om zijn cissoide. De boven geciteerde oplossing van S. C. II, 4 is ontleend aan zijn werk περὶ πυρίων (over brandspiegels).

Een gegeven lijnstuk AB in E zoo te verdeelen, dat, als de betrekkingen

$$(ZA, AE) = (AK, BE)$$
$$(HB, BE) = (BM, AE) \qquad \text{met } AK = BM$$

gelden, E voldoet aan de voorwaarde

$$(ZE, HE) = (\Gamma, \Delta)$$

waarin Γ en Δ gegeven lijnstukken zijn.

Dit vraagstuk wordt nu als volgt geanalyseerd:

Laat ME verlengd het verlengde van KA in Θ snijden; evenzoo KE verlengd het verlengde van MB in Λ, dan bewijst men zonder moeite

$$ZA = \Theta A \quad \text{en} \quad HB = \Lambda B.$$

Nu is

$$(AE, BE) = (\Theta A, MB) = (KA, \Lambda B) = (\Theta A + AE, MB + BE) =$$
$$= (KA + AE, \Lambda B + BE)$$

dus $\mathbf{O}\,(\Theta A + AE, \Lambda B + BE) = \mathbf{O}\,(KA + AE, MB + BE)$

of, als $B\Sigma = BM, AP = AK$,

$$\mathbf{O}\,(ZE, HE) = \mathbf{O}\,(PE, \Sigma E).$$

Hieruit volgt

$$(\Gamma, \Delta) = (ZE, HE) = [\mathbf{O}(ZE, HE), \mathbf{T}\,(HE)] = [\mathbf{O}\,(PE, \Sigma E), \mathbf{T}\,(HE)].$$

Maak nu $EO = EB$ en loodrecht op AB, ΣT loodrecht op AB met T op het verlengde van OB. Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken EOB en ΣTB volgt nu

$(TB, OB) = (\Sigma B, EB)$ dus *componendo* $(TO, OB) = (\Sigma E, EB)$.

Snijdt de loodlijn op BA door P het verlengde van BO in Y dan is ook

$$(BO, OY) = (BE, EP)$$

waaruit *ex aequali*

$$(TO, OY) = (\Sigma E, EP)$$

Dus is

$$[\mathbf{O}\,(TO, OY), \mathbf{T}\,(OY)] = [\mathbf{O}\,(\Sigma E, EP), \mathbf{T}\,(EP)]$$

of

$$[\mathbf{O}\,(TO, OY), \mathbf{O}\,(\Sigma E, EP)] = [\mathbf{T}\,(OY), \mathbf{T}\,(EP)] = 2:1.$$

Dus is

$$\mathbf{O}\,(TO, OY) = 2\mathbf{O}\,(\Sigma E, EP).$$

Boven is gevonden

$$[\mathbf{O}(\Sigma E, EP), \mathbf{T}(EH)] = (\Gamma, \Delta)$$

dus wegens $EH = \Xi O$

$$[\mathbf{O}(TO, OY), \mathbf{T}(O\Xi)] = (2\Gamma, \Delta).$$

Construeer nu een lijnstuk Φ zoo dat

$$(2\Gamma, \Delta) = (TY, \Phi)$$

dan blijkt, dat Ξ op een ellips ligt, die ontstaan is door elliptische aanpassing aan Φ met een defect, waarvan de zijdenverhouding $TY, \Phi)$ is (III; 1,2). TY is hierin de middellijn, toegevoegd aan de richting ΞO.

Maar wegens de gelijkheid der rechthoeken KB en ΠN ligt Ξ ook op een orthogonale hyperbool met asymptoten KN en KM, die door B gaat. Hierdoor is het punt Ξ bepaald, waaruit E volgt.

Algebraisch: Is $AB = a$, $AE = x$, $AK = BM = b$, $(\Gamma, \Delta) = m : n$, dan moet x voldoen aan

$$\frac{x + \dfrac{b}{a-x}x}{a - x + \dfrac{b}{x}(a-x)} = \frac{m}{n}$$

of

$$\frac{x^2(a-x+b)}{(a-x)^2(x+b)} = \frac{m}{n}$$

wat te herleiden is tot

$$(a-x+b)(x+b) = \frac{m}{n}\left\{a - x + \frac{ab}{x} - b\right\}^2$$

Stel nu

$$\frac{ab}{x} = y$$

dan gaat de vergelijking over in

$$(y + a - x - b)^2 = \frac{n}{m}(a-x+b)(x+b).$$

Beschouwt men nu x en y als coördinaten in het rechthoekig assenstelsel $K(MN)$, dan heeft men de orthogonale hyperbool

$$xy = ab$$

die KM en KN tot asymptoten heeft en door B gaat, te snijden met de kromme

$$\frac{(y+a-x-b)^2}{(a-x+b)(x+b)} = \frac{n}{m}.$$

Hierin is

$$y+a-x-b = \Xi O,\ a-x+b = \frac{OT}{\sqrt{2}},\ x+b = \frac{OY}{\sqrt{2}}.$$

Stelt men

$$\Xi O = \eta,\ OT = \xi_1,\ OY = \xi_2,$$

dan heeft men de vergelijking

$$\frac{\eta^2}{\xi_1 \xi_2} = \frac{n}{2m}$$

welke vergelijking een ellips voorstelt, geschreven in den twee-abscissen-vorm (III; 1,1), die TY tot diameter heeft en de richting van ΞO als daaraan toegevoegde richting.

Propositie 5.

Een bolsegment te construeeren, dat gelijkvormig is met een gegeven bolsegment en gelijk aan een ander gegeven bolsegment.

Denk (fig. 85), dat het gevraagde segment $\Lambda K\Theta$ gelijk is aan het gegeven segment ΓAB en gelijkvormig met het gegeven segment HEZ[10]). Door toepassing van **S.C.** II, 2 kunnen alle drie de segmenten door kegels vervangen worden. Zij dus

$(\Psi Y, \Lambda Y) = (P\Xi + \Xi Y, \Xi Y)$ dan is segment $\Lambda K\Theta$ = kegel $\Psi K\Theta$.
$(XT, \Gamma T) = (\Pi N + NT, NT)$ dan is segment ΓAB = kegel XAB.
$(\Omega\Phi, H\Phi) = (\Sigma O + O\Phi, O\Phi)$ dan is segment HEZ = kegel ΩEZ.

Nu moet dus gelden

1) kegel XAB = kegel $\Psi K\Theta$

dus

$$[\mathrm{T}(K\Theta),\ \mathrm{T}(AB)] = (XT, \Psi Y) \quad \ldots\ldots (\alpha).$$

2) kegel $\Omega EZ \sim$ kegel $\Psi K\Theta$[11])

---

[10]) Twee bolsegmenten heeten gelijkvormig, wanneer de hoogten zich verhouden als de diameters des bases, dus als de meridiaandoorsneden gelijkvormig zijn.

[11]) Uit de gelijkvormigheid der segmenten $\Lambda K\Theta$ en HEZ volgt nl. de gelijkvormigheid der kegels $\Psi K\Theta$ en ΩEZ. Immers men heeft

$(\Xi Y, \Xi P) = (O\Phi, O\Sigma)$ dus

dus

$$(\Omega\Phi, EZ) = (\Psi Y, K\Theta).$$

Hierin is $(\Omega\Phi, EZ)$ een gegeven verhouding; we stellen haar gelijk aan (XT, Δ). Men heeft dan *permutando*

$$(XT, \Psi Y) = (\Delta, K\Theta) \text{ dus wegens } (\alpha)$$
$$(\Delta, K\Theta) = [\mathbf{T}(K\Theta), \mathbf{T}(AB)].$$

Zij nu

$$\mathbf{T}(K\Theta) = \mathbf{O}(AB, \varsigma) \text{ dan geldt}$$
$$(AB, K\Theta) = (K\Theta, \varsigma) \text{ en tevens}$$
$$(\Delta, K\Theta) = (\varsigma, AB) \text{ of } permutando$$
$$(AB, K\Theta) = (\varsigma, \Delta).$$

Dus

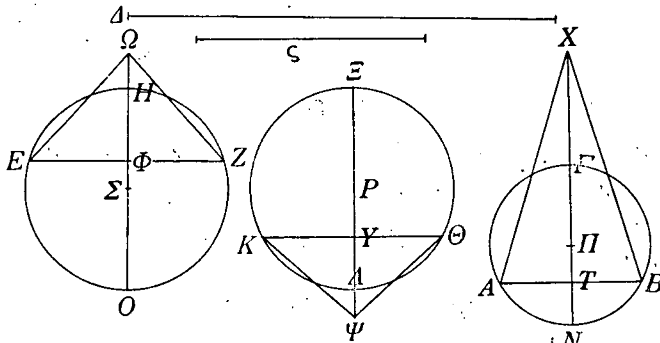


Fig. 85.

$$(AB, K\Theta) = (K\Theta, \varsigma) = (\varsigma, \Delta).$$

Hieruit blijkt, dat $K\Theta$ de eerste van de twee middenevenredigen tusschen de gegeven lijnstukken AB en Δ is. Hieruit volgt de synthese [12]).

$$(\Xi Y + \Xi P, \Xi Y) = (O\Phi + O\Sigma, O\Phi)$$

waaruit wegens **S. C.** II, 2 volgt

$$(\Psi Y, \Lambda Y) = (\Omega\Phi, H\Phi)$$

en weer in verband met de gelijkvormigheid der segmenten

$$(\Psi Y, K\Theta) = (\Omega\Phi, EZ)$$

dus de gelijkvormigheid der kegels.

[12]) Wanneer de synthese geleverd werd door omkeering der analyse, zou men nog moeten bewijzen, dat uit de gelijkvormigheid der kegels $\Psi K\Theta$ en ΩEZ de gelijkvormigheid der segmenten $\Lambda K\Theta$ en HEZ volgt. Archimedes vermijdt dit door na constructie van $K\Theta$ den kegel $\Psi K\Theta$ gelijkvormig te maken met den kegel ΩEZ en het segment $\Lambda K\Theta$ gelijkvormig met het segment HEZ; daarna bewijst hij, dat het segment $\Lambda K\Theta$ gelijk is aan het segment ΓAB.

Propositie 6.

Wanneer gegeven zijn twee bolsegmenten, al dan niet van denzelfden bol, een bolsegment te vinden, dat met het eene der gegeven segmenten gelijkvormig zal zijn en een oppervlakte zal hebben, gelijk aan de oppervlakte van het andere segment.

Moet (fig. 86) het segment ΛKM gelijkvormig zijn met het segment $BA\Gamma$, dan moet

$$(\Lambda N, \Lambda M) = (B\Theta, B\Gamma).$$

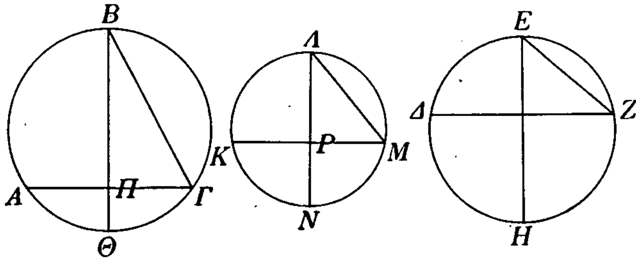


Fig. 86.

Wil echter de oppervlakte van het segment ΛKM aan die van het segment $E\Delta Z$ gelijk zijn, dan moet

$$\Lambda M = EZ.$$

Dus geldt

$$(\Lambda N, EZ) = (B\Theta, B\Gamma).$$

Hierdoor is ΛN bepaald en ook het segment.

Propositie 7.

Van een gegeven bol door een plat vlak een segment af te snijden, zoodat het segment tot den kegel, die dezelfde basis heeft als het segment en een even groote hoogte, een gegeven reden heeft.

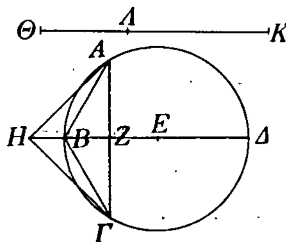


Fig. 87.

Is (fig. 87) $BA\Gamma$ het gevraagde segment, dan is dit gelijk aan den kegel $HA\Gamma$, waarbij H bepaald is door

$$(HZ, BZ) = (R + \Delta Z, \Delta Z).$$

Nu moet de verhouding (HZ, BZ) gelijk zijn aan de gegeven verhouding van het segment en den kegel $BA\Gamma$, dus is $(R + \Delta Z, \Delta Z)$ een gegeven verhouding en dus ook $(R, \Delta Z)$. Hierdoor is $A\Gamma$ bepaald.

Alvorens tot de synthese over te gaan, leidt Archimedes een diorismos af, d.w.z. hij onderzoekt, aan welke voorwaarde de te geven verhouding moet voldoen, wil de oplossing mogelijk zijn. Nu is wegens $\Delta B > \Delta Z$ ook $(R, \Delta Z) > (R, \Delta B)$ (Euclides V, 8), waaruit *componendo* volgt

$$(R + \Delta Z, \Delta Z) > (R + \Delta B, \Delta B) = 3 : 2$$

zoodat de gegeven verhouding grooter moet zijn dan 3 : 2.

Dat deze voorwaarde ook voldoende is, blijkt bij uitvoering der synthese. Gegeven wordt een verhouding

$$(\Theta K, \Lambda K) > (3, 2)$$

zoodat

$$(\Theta K, K\Lambda) > (R + \Delta B, \Delta B).$$

Separando

$$(\Theta\Lambda, K\Lambda) > (R, \Delta B).$$

Maak nu

$$(\Theta\Lambda, K\Lambda) = (R, \Delta Z)$$

dan wordt $\Delta Z < \Delta B$, zoodat er inderdaad een punt Z ontstaat, dat aan de gestelde voorwaarde blijkt te voldoen.

Propositie 8 (fig. 88).

Wanneer een bol gesneden wordt door een plat vlak, dat niet door het centrum gaat, dan heeft het grootste segment tot het kleinste een kleinere reden dan de dubbelreden van de reden, die de oppervlakte van het grootste segment tot de oppervlakte van het kleinste segment heeft, maar een grootere dan de anderhalfde (μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον).

Het begrip dubbelreden (διπλασίων λόγος) dat aequivalent is met wat wij het vierkant van een verhouding noemen, is uit Euclides V bekend (zie III; 0,31). Op grond hiervan verloopt het bewijs van de eerste ongelijkheid

$$(\text{Inhoud segment } BA\Gamma, \text{Inhoud segment } \Delta A\Gamma) < \Delta\Delta(\text{oppervlakte segment } BA\Gamma, \text{oppervlakte segment } \Delta A\Gamma)$$

vrij eenvoudig. Men bepaalt namelijk volgens II, 2 de kegels $\Theta A\Gamma$ en $HA\Gamma$, die opv. aan de bolsegmenten $BA\Gamma$ en $\Delta A\Gamma$ gelijk zijn. Hierdoor is dus

Fig. 88.

$$(\Theta Z, BZ) = (R + Z\Delta, Z\Delta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$(HZ, \Delta Z) = (R + ZB, ZB) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

De verhouding van de inhouden der segmenten is dus gelijk aan

$$(Z\Theta, ZH)$$

terwijl de verhouding van hun oppervlakten gelijk is aan

$$[\mathbf{T}\,(AB), \mathbf{T}\,(A\Delta)] \text{ dus aan } (ZB, Z\Delta).$$

Te bewijzen is dus

$$(Z\Theta, ZH) < \Delta\Lambda\, (ZB, Z\Delta) = [\mathbf{T}\,(ZB), \mathbf{T}\,(Z\Delta)].$$

Nu is, wanneer $BK = R$

wegens (1)	wegens (2)
separando $(B\Theta, ZB) = (BK, Z\Delta)$ (1*a*)	$(ZH, Z\Delta) = [ZK, ZB)$
permutando et *invertendo*	*permutando*
$(ZB, Z\Delta) = (B\Theta, BK)$	$(ZB, Z\Delta) = (ZK, ZH)$ (3)

$$(B\Theta, BK) = (ZK, ZH) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Wegens $\Theta Z > \Theta B$ is verder

$$(\Theta Z, \Theta K) > (\Theta B, \Theta K)$$

dus (III; 0,42)

$$(\Theta Z, ZK) < (\Theta B, BK) = (ZK, ZH) \text{ (wegens (4))}$$

of

$$\mathbf{O}\,(\Theta Z, ZH) < \mathbf{T}\,(ZK).$$

Dus is

$[\mathbf{O}\,(\Theta Z, ZH), \mathbf{T}\,(ZH)] < [\mathbf{T}\,(ZK), \mathbf{T}\,(ZH)]$ of wegens (3)

$(\Theta Z, ZH) < [\mathbf{T}\,(ZB), \mathbf{T}\,(Z\Delta)]$ q.e.d.

Om het bewijs van de tweede ongelijkheid te leveren, bespreken we eerst het begrip „anderhalfde reden" (ἡμιόλιος λόγος). De beteekenis hiervan is onmiddellijk duidelijk, wanneer men bedenkt, hoe de begrippen „dubbelreden" en „tripelreden" beide konden worden verklaard met behulp van een rij van gedurig evenredige grootheden. Is nl.

$$(A, B) = (B, \Gamma) = (\Gamma, \Delta)$$

dan heet (A, Δ) tripelreden en (B, Δ) dubbelreden van (Γ, Δ). Het ligt nu voor de hand, dat men (A, Δ) anderhalfde reden van (B, Δ) zal noemen. Symbool: $(A, \Delta) = \boldsymbol{H\Lambda}(B, \Delta)$. In algebraische symboliek beduidt dit

$$\frac{A}{\Delta} = \left(\frac{B}{\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}$$

zoodat hier dus eigenlijk, voor het eerst in de wiskundige literatuur, een gebroken exponent optreedt.

Het bewijs, dat een reden (A, Δ) anderhalfde reden van een andere reden (B, Δ) is, kan nu aldus geleverd worden, dat men het bestaan aantoont van een evenredigheid

$$[\mathbf{T}(A), \mathbf{T}(B)] = (B, \Delta).$$

Is nl.

$$(B, \Gamma) = (\Gamma, \Delta), \text{ dan is}$$

$$[\mathbf{T}(A), \mathbf{T}(B)] = [\mathbf{T}(B), \mathbf{T}(\Gamma)]$$

dus

$$(A, B) = (B, \Gamma) = (\Gamma, \Delta)$$

dus

$$(A, \Delta) = \boldsymbol{H\Lambda}(B, \Delta)$$

Evenzoo gelukt het bewijs van de ongelijkheid

$$(A, \Delta) > \boldsymbol{H\Lambda}(B, \Delta)$$

wanneer men kan aantoonen

$$[\mathbf{T}(A), \mathbf{T}(B)] > (B, \Delta).$$

Nu moet in het tweede deel van Prop. 8 bewezen worden

$$(Z\Theta, ZH) > \boldsymbol{H\Lambda}(ZB, Z\Delta)$$

en dat zal volgens het juist behandelde schema gelukken, wanneer een grootheid X wordt bepaald, zoodat

$$(ZB, Z\Delta) = (X, ZH)$$

en wanneer dan bewezen kan worden

$$[\mathbf{T}(Z\Theta), \mathbf{T}(X)] > (X, ZH).$$

Nu was (3)

$$(ZB, Z\Delta) = (ZK, ZH)$$

zoodat ZK voor X kan worden genomen. Te bewijzen is dus nog

$$[\mathbf{T}(Z\Theta), \mathbf{T}(ZK)] > (ZK, ZH) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Hierin slaagt Archimedes nu als volgt: voor de reden (ZK, ZH) kan volgens (4) worden gezet $(B\Theta, BK)$. Om de laatste uitdrukking om te vormen, bedenken we, dat wegens Euclides II, 5 de ongelijkheid geldt

$$\mathbf{O}(ZB, Z\Delta) < \mathbf{O}(EB, E\Delta) \text{ [13] of wegens } EB = E\Delta = BK$$
$$(ZB, BK) < (BK, Z\Delta) \text{ dus wegens (1a)}$$
$$(ZB, BK) < (B\Theta, ZB)$$

of

$$\mathbf{T}(BZ) < \mathbf{O}(B\Theta, BK)$$

Zij nu

$$\mathbf{O}(B\Theta, BK) = \mathbf{T}(BN)$$

dan is

$$(B\Theta, BN) = (BN, BK)$$

Hieruit volgt

$(B\Theta, BK) = [\mathbf{T}(BN), \mathbf{T}(BK)] \qquad (\Theta N, BN)$ *componendo* $= (KN, BK)$ *permutando* $(\Theta N, KN) = (BN, BK)$

$$(B\Theta, BK) = [\mathbf{T}(\Theta N), \mathbf{T}(KN)] \text{ en dus (4):}$$
$$(ZK, ZH) = [\mathbf{T}(\Theta N), \mathbf{T}(KN)]$$

Het bewijs van de verlangde ongelijkheid (5) zal dus geleverd zijn, indien nog kan worden aangetoond

$$[\mathbf{T}(Z\Theta), \mathbf{T}(ZK)] > [\mathbf{T}(\Theta N), \mathbf{T}(KN)]$$

of

$$(Z\Theta, ZK) > (\Theta N, KN)$$

---

13) Immers $\mathbf{O}(ZB, Z\Delta) = \mathbf{T}(EB) - \mathbf{T}(EZ) < \mathbf{T}(EB)$.

Dit volgt echter onmiddellijk uit de ongelijkheid

$$\Theta Z > KZ$$

Immers hieruit volgt (III; 0,45)

$$(\Theta Z, KZ) > (\Theta Z + ZN, KZ + ZN)$$

of

$$(\Theta Z, KZ) > (\Theta N, KN)$$

Algebraisch: Stel den straal van den bol R, de pijlen ZB en $Z\Delta$ der segmenten $BA\Gamma$ en $\Delta A\Gamma$ opv. h_1 en h_2 $(h_1 > h_2)$, de hoogten $Z\Theta$ en ZH der kegels $\Theta A\Gamma$ en $HA\Gamma$, die opv. aan een dezer twee segmenten gelijk zijn, H_1 en H_2, dan is
de verhouding van de inhouden der segmenten $H_1 : H_2$
de verhouding van de oppervlakten $h_1 : h_2$

Te bewijzen is nu

$$\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{\frac{3}{2}} < \frac{H_1}{H_2} < \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

waarin H_1 en H_2 opv. bepaald zijn door de betrekkingen

$$\frac{H_1}{h_1} = \frac{R + h_2}{h_2} \text{ en } \frac{H_2}{h_2} = \frac{R + h_1}{h_1}.$$

Voor de verhouding $H_1 : H_2$ vinden we dus

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{R + h_2}{R + h_1} \cdot \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Dat nu $\frac{H_1}{H_2} < \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$ volgt onmiddellijk uit $h_2 < h_1$

De linksche ongelijkheid is te herleiden tot

$$\sqrt{\frac{h_2}{h_1}} < \frac{R + h_2}{R + h_1}.$$

De juistheid hiervan is in te zien, door uit te gaan van

$$h_1 h_2 < R^2$$

Hieruit volgt nl.

$$\sqrt{h_1 h_2}\,(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) < R(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) \quad \ldots \quad (\delta)$$

of

$$(R + h_1)\sqrt{h_2} < (R + h_2)\sqrt{h_1}.$$

Deze afleiding is echter niet de algebraische vertaling van de redeneering van Archimedes. In het eerste deel van het bewijs

tracht hij tot een schatting van $H_1 : H_2$ te komen door eerst H_1H_2 te schatten en daarna door H_2^2 te deelen. Hij vindt

$$H_1H_2 < (R+h_1)^2$$

wat wij uit de uitdrukkingen voor H_1 en H_2 onmiddellijk aflezen, maar wat hij uit

$$\frac{H_1}{H_1-h_1-R} > \frac{H_1-h_1}{H_1-h_1-R}$$

afleidt door *separando* te schrijven

$$\frac{H_1}{R+h_1} < \frac{H_1-h_1}{R} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{R+h_1}{H_2}.$$

Hierna is

$$\frac{H_1}{H_2} < \left(\frac{R+h_1}{H_2}\right)^2 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2.$$

In het tweede deel moet hij de ongelijkheid (5) aantoonen:

$$\left(\frac{H_1}{R+h_1}\right)^2 > \frac{R+h_1}{H_2}$$

of, wat wegens

$$\frac{R+h_1}{H_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{H_1-h_1}{R}$$

op hetzelfde neerkomt

$$\left(\frac{H_1}{R+h_1}\right)^2 > \frac{H_1-h_1}{R}.$$

Hij gaat nu eveneens uit van de ongelijkheid

$$h_1h_2 < R^2$$

of

$$\frac{h_1}{R} < \frac{R}{h_2} = \frac{H_1-h_1}{h_1}$$

waaruit volgt

$$h_1^2 < R(H_1-h_1).$$

Stel nu

$$R(H_1-h_1) = t^2 (t = BN) \text{ dan is } \frac{H-h_1}{t} = \frac{t}{R}$$

dus

$$\frac{H_1-h_1}{R} = \frac{t^2}{R^2} = \left(\frac{H_1-h_1+t}{R+t}\right)^2.$$

Te bewijzen is nu nog

$$\frac{H_1}{R+h_1} > \frac{H_1 - h_1 + t}{R+t}$$

of

$$\frac{H_1}{h_1 - t} > \frac{R+h_1}{h_1 - t}$$

wat uit $H_1 > R + h_1$ volgt.

We zien in dit voorbeeld de oorzaak van de groote complicatie van de afleidingen der Grieksche redentheorie: zij wil voortdurend werken met verhoudingen van lijnstukken en ze kan daardoor uitdrukkingen als γ of δ in het geheel niet gebruiken.

Het is in dit verband historisch merkwaardig, dat Archimedes op de boven weergegeven behandeling der propositie een andere laat volgen, die van de gebruikelijke methode afwijkt en die dan ook veel korter is. (fig. 89).

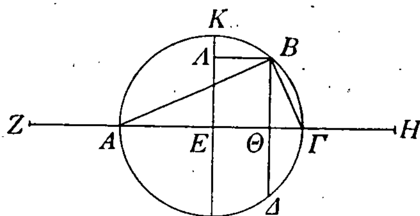


Fig. 89.

Zij berust op het begrip van de samengestelde reden, dat uit Euclides bekend is (III; 0,33) en dat in de Grieksche redentheorie dezelfde plaats inneemt als het begrip product van twee verhoudingen (dus van twee reëele positieve getallen) in de latere wiskunde. Archimedes beschouwt nl. de verhouding van de segmenten $AB\Delta$ en $\Gamma B\Delta$ als samengesteld uit de redens

(segment $AB\Delta$, kegel $AB\Delta$), (kegel $AB\Delta$, kegel $\Gamma B\Delta$), (kegel $\Gamma B\Delta$, segment $\Gamma B\Delta$),

Is nu $AZ = \Gamma H = EA$, dan zijn deze redens opv. gelijk aan

$$(H\Theta, \Gamma\Theta) \qquad (A\Theta, \Gamma\Theta) \qquad (A\Theta, Z\Theta)$$

Stelt men de eerste twee samen volgens Euclides VI, 23, dan blijkt de reden der segmenten samengesteld te zijn uit

$$[\mathbf{O}(H\Theta, A\Theta), \mathbf{T}(\Gamma\Theta)] \text{ en } (A\Theta, Z\Theta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Tot zoover wijkt het betoog in niets af van de traditie der Euclidische oppervlakterekening. Volgens haar methode verdergaande, zou men nu echter de vierde evenredige X van $\Gamma\Theta, A\Theta$ en $H\Theta$ moeten invoeren en met behulp hiervan de eerste der thans nog overblijvende redens moeten vervangen door $(X, \Gamma\Theta)$, dus door een reden van lijnstukken [14]).

Men zou zich nu een uitbreiding van deze methode kunnen voorstellen in dier voege, dat men de samengestelde reden (1) interpreteerde als reden van twee rechthoekige parallelepipeda, waarvan het eerste de ribben $H\Theta$, $A\Theta$, $A\Theta$, het tweede de ribben $\Gamma\Theta$, $\Gamma\Theta$, $Z\Theta$ zou hebben. Dat zou een stereometrische stelling over de reden van twee zulke parallelepipeda vereischen, analoog aan de propositie Euclides VI, 23 over parallelogrammen; men zou dan een uitbreiding der oppervlakterekening op de ruimte verkrijgen, die weliswaar bij Euclides niet voorkomt, maar die toch volkomen in het kader der *Elementen* zou passen. Stellen we nu een parallelepipedum met ribben A, B, Γ voor door $\Sigma(A, B, \Gamma)$, dan zou dus voor de reden der segmenten gevonden worden

$$[\Sigma(H\Theta, A\Theta, A\Theta),\ \Sigma(\Gamma\Theta, \Gamma\Theta, Z\Theta)] \quad \ldots \quad (7)$$

terwijl de dubbelreden der segmentoppervlakten, d.i.

$$[\mathbf{T}(A\Theta),\ \mathbf{T}(\Gamma\Theta)]$$ [15])

te schrijven zou zijn als

$$[\Sigma(H\Theta, A\Theta, A\Theta),\ \Sigma(H\Theta, \Gamma\Theta, \Gamma\Theta)] \quad \ldots \quad (8)$$

Daar nu $Z\Theta > H\Theta$ volgt het gestelde onmiddellijk door vergelijking van (7) en (8).

Wat Archimedes nu in werkelijkheid doet, wijkt van de hier weergegeven handelwijze slechts terminologisch af; hij spreekt niet over de verhouding van parallelepipeda, maar behandelt de in de redens (6) voorkomende termen (in overeenstemming met wat later algemeen gebruikelijk zou worden, maar in afwijking

---

[14]) Men zou dan nl. krijgen

$$\mathbf{O}\,(H\Theta, A\Theta) = \mathbf{O}\,(\Gamma\Theta, X)$$

dus

$$[\mathbf{O}\,(H\Theta, A\Theta),\ T\,(\Gamma\Theta)] = [\mathbf{O}\,(\Gamma\Theta, X),\ \mathbf{T}\,(\Gamma\Theta)] = (X, \Gamma\Theta).$$

[15]) De reden der oppervlakten is immers

$$[\mathbf{T}\,(AB),\ \mathbf{T}\,(B\Gamma)] = (A\Theta, \Gamma\Theta)$$

dus hun dubbelreden

$$[\mathbf{T}\,(A\Theta),\ \mathbf{T}\,(\Gamma\Theta)].$$

van de Euclidische traditie), alsof het getallen waren, die met elkaar vermenigvuldigd kunnen worden. Hij zegt dus b.v., dat de reden, samengesteld uit die van den rechthoek op *HΘ, AΘ* en het vierkant op *ΓΘ* met die van *AΘ* tot *ZΘ*, dezelfde is als de reden van den rechthoek op *HΘ, AΘ maal* (ἐπι) *AΘ* tot het vierkant op *ΓΘ maal ZΘ*. Zoo zet hij reeds een eersten stap op den weg naar de arithmetiseering der meetkundige redeneering, die pas in de 17e eeuw tot volledige ontwikkeling zal komen.

Het bewijs van het tweede deel van II, 8 is nu ook eenvoudiger te leveren. Voor de anderhalfde reden van de oppervlakten der segmenten, dus van $[\mathrm{T}(AB), \mathrm{T}(\Gamma B)]$ wordt de reden der kuben met ribben opv. *AB* en *ΓB* in de plaats gezet[16]. Deze kuben verhouden zich nu als de kuben met ribben opv. *AΘ* en *BΘ*, welker reden samengesteld is uit

$$[\mathrm{T}(A\Theta), \mathrm{T}(B\Theta)] \text{ en } (A\Theta, B\Theta)$$

Nu is

$$(A\Theta, B\Theta) = [\mathrm{T}(B\Theta), \mathrm{O}(B\Theta, \Gamma\Theta)]$$

zoodat, wegens het voorkomen van den gemeenschappelijken term $\mathrm{T}(B\Theta)$, de reden der kuben gelijk is aan

$$[\mathrm{T}(A\Theta), \mathrm{O}(B\Theta, \Gamma\Theta)]$$

Beschouwen we nu deze beide oppervlakken als bases van parallelepipeda met gemeenschappelijke hoogte *HΘ*[17], dan wordt de anderhalfde reden der segmentoppervlakten gelijk aan

$$[\Sigma(A\Theta, A\Theta, H\Theta), \Sigma(B\Theta, \Gamma\Theta, H\Theta)]$$

en door vergelijking met (7) blijkt, dat nu nog te bewijzen is

$$\Sigma(\Gamma\Theta, \Gamma\Theta, Z\Theta) < \Sigma(B\Theta, \Gamma\Theta, H\Theta)$$

Dit beduidt

$$[\mathrm{T}(\Gamma\Theta), \mathrm{O}(B\Theta, \Gamma\Theta)] < (H\Theta, Z\Theta)$$

of

$$(\Gamma\Theta, B\Theta) < (H\Theta, Z\Theta)$$

of

$$(\Gamma\Theta, B\Theta) < (H\Theta, A\Theta + EK) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

---

[16]) Dit bewijst, dat Archimedes voortdurend stereometrisch redeneert en dat de ἐπί-spreekwijze in den trant van ons „grondvlak maal hoogte" dient, om inhouden van lichamen weer te geven.

[17]) Bij Archimedes uitgedrukt met ἐπί.

Hiervoor is voldoende

$$(\Gamma H, A\Theta + \Lambda K) > (\Gamma\Theta, B\Theta). \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (10)$$

Immers is dit bewezen, dan is *permutando*

$$(\Gamma H, \Gamma\Theta) > (A\Theta + \Lambda K, B\Theta)$$

of *componendo*

$$(\Theta H, \Gamma\Theta) > (A\Theta + KE, B\Theta)$$

of *permutando*

$$(\Theta H, A\Theta + KE) > (\Gamma\Theta, B\Theta) \text{ d.i. } (9).$$

Om (10) te bewijzen, kan men ook aantoonen

$$(\Gamma H, A\Theta + \Lambda K) > (B\Theta, A\Theta) = (\Lambda E, A\Theta)$$

of *permutando*

$$(KE, \Lambda E) > (A\Theta + K\Lambda, A\Theta)$$

of *separando*

$$(K\Lambda, \Lambda E) > (K\Lambda, A\Theta)$$

of

$$\Lambda E < A\Theta$$

wat inderdaad het geval is.

Algebraisch geformuleerd, ziet deze afleiding er als volgt uit: De verhouding der inhouden is

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{H_1}{H_2} = \frac{H_1}{h_1} \cdot \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{h_2}{H_2} = \frac{(R + h_2)h_1^2}{(R + h_1)h_2^2}$$

die der oppervlakten

$$\frac{O_1}{O_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

Dat nu $\frac{I_1}{I_2} < \left(\frac{O_1}{O_2}\right)^2$ blijkt onmiddellijk uit $h_1 > h_2$.

Archimedes blijkt hier dus de redeneering te volgen, die we boven als meest voor de hand liggend gaven.

In het tweede deel wordt (als $\Theta B = r$) geschreven:

$$\left(\frac{O_1}{O_2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{AB}{\Gamma B}\right)^3 = \left(\frac{h_1}{r}\right)^3 = \frac{h_1^2}{rh_2} = \frac{h_1^2(R + h_2)}{rh_2(R + h_2)}$$

Door vergelijking met $\frac{I_1}{I_2}$ blijkt, dat nog te bewijzen is

$$h_2(R + h_1) < r(R + h_2)$$

of

$$\frac{h_2}{r} < \frac{R + h_2}{R + h_1} \text{ of } \frac{r}{h_1} < \frac{R + h_2}{R + h_1}$$

Nu is $h_1 > r$ dus

$$\frac{h_1}{R-r} > \frac{r}{R-r}$$

dus

$$\frac{h_1}{R-r+h_1} > \frac{r}{R}$$

dus

$$\frac{r}{h_1} < \frac{R}{R-r+h_1}$$

dus a fortiori

$$\frac{r}{h_1} < \frac{R+h_2}{R+h_1}$$

Propositie 9.

Van alle bolsegmenten met gelijke oppervlakte is de halve bol het grootste.

Laat (fig. 90) $AB\Delta$ en $EZ\Theta$ twee bolsegmenten zijn, waarvan

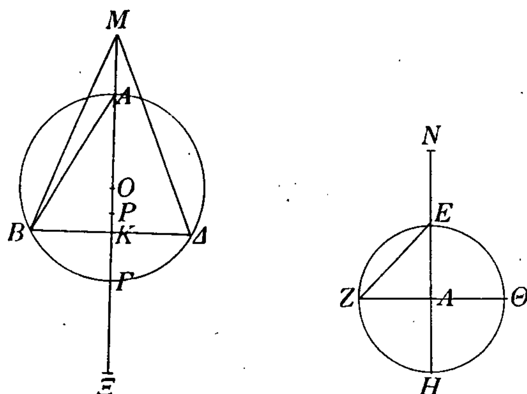


Fig. 90.

alleen het laatste een halve bol is. Gegeven is, dat de oppervlakten gelijk zijn, dus

$$AB = EZ.$$

Te bewijzen is, dat de inhoud van $EZ\Theta$ grooter is dan die van $AB\Delta$.

Om dit te bewijzen, worden de kegels geconstrueerd, die aan de beschouwde segmenten opv. gelijk zijn. Zij hiertoe $\Gamma\Xi = \Gamma O$, straal van den bol O, waarvan $AB\Delta$ deel uitmaakt, $NE = E\Lambda$, straal van den bol Λ, waarvan $EZ\Theta$ de helft is. Dan is

segment $AB\Delta$ = kegel $MB\Delta$, wanneer $(MK, AK) = (K\Xi, K\Gamma)$
of

$$\mathbf{O}(MK, K\Gamma) = \mathbf{O}(AK, K\Xi) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Bovendien is de halve bol $EZ\Theta$ gelijk aan den kegel $NZ\Theta$.

Het bewijs zal geleverd zijn, indien is aangetoond

$$(N\Lambda, MK) > [\mathbf{T}(BK), \mathbf{T}(Z\Lambda)]$$

of

$$(E\Lambda, MK) > [\mathbf{T}(BK), 2\mathbf{T}(E\Lambda)] = [\mathbf{T}(BK), \mathbf{T}(EZ)].$$

Maak nu $AP = E\Lambda$, dan is wegens $AB = EZ$ nog te bewijzen

$$(AP, MK) > [\mathbf{T}(BK), \mathbf{T}(AB)] = (K\Gamma, A\Gamma)$$

of

$$\mathbf{O}(AP, A\Gamma) > \mathbf{O}(MK, K\Gamma)$$

Dit staat wegens (1) gelijk met

$$\mathbf{O}(AP, A\Gamma) > \mathbf{O}(AK, K\Xi)$$

welke ongelijkheid zal moeten worden afgeleid uit de ligging van P op $A\Gamma$, vergeleken met die van K.

De kern van het bewijs bestaat nu hierin, dat men aantoont, dat P dichter bij het centrum O ligt dan K. Is dit nl. bewezen, dan is wegens Euclides II, 5:

$$\mathbf{O}(AP, P\Gamma) > \mathbf{O}(AK, K\Gamma) \text{ [18]}$$

Tel hierbij aan weerszijden op

$$\mathbf{T}(AP) = \mathbf{T}(E\Lambda) = \tfrac{1}{2}\mathbf{T}(EZ) = \tfrac{1}{2}\mathbf{T}(AB) = \mathbf{O}(AK, \Gamma\Xi)$$

dan komt er

$$\mathbf{O}(AP, A\Gamma) > \mathbf{O}(AK, K\Xi) \qquad \text{q.e.d.}$$

Voor het bewijs, dat P tusschen O en K ligt, moet men de gevallen onderscheiden, dat $AB\Delta$ grooter of kleiner is dan de helft van bol O. Archimedes behandelt alleen het eerste. Men heeft dan (fig. 90):

$$2\mathbf{T}(AP) = \mathbf{T}(AB) \begin{cases} > 2\mathbf{T}(AO) \\ = \mathbf{O}(AK, A\Gamma) < 2\mathbf{T}(AK) \end{cases}$$

dus $AO < AP < AK$, dus P tusschen O en K.

---

[18]) Immers

$$\mathbf{O}(AP, P\Gamma) + \mathbf{T}(PO) = \mathbf{O}(AK, K\Gamma) + \mathbf{T}(KO) = \mathbf{T}(AO)$$

Wegens

$PO < KO$ is dus $\mathbf{O}(AP, P\Gamma) > \mathbf{O}(AK, K\Gamma)$.

In het tweede geval is echter (fig. 91)

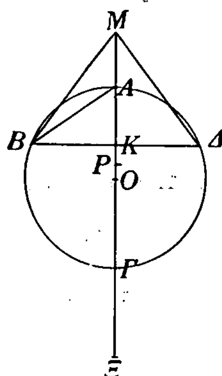


Fig. 91.

$$2\mathbf{T}(AP) = \mathbf{T}(AB) \begin{cases} < 2\mathbf{T}(AO) \\ = \mathbf{O}(AK, A\Gamma) > 2\mathbf{T}(AK) \end{cases}$$

dus $AO > AP > AK$, dus ook P tusschen O en K.

Algebraisch: Zij in bol O de straal R, $AK = h_1$, $MK = H$, $AB = k$, $BK = r$, $K\Gamma = h_2$, in *bol* Λ de straal ϱ

dan is gegeven

$$2\varrho^2 = k^2 \text{ of } \varrho^2 = Rh_1$$

en te bewijzen

$$\tfrac{2}{3}\pi\varrho^3 > \tfrac{1}{3}\pi r^2 H$$

of

$$2\varrho^3 > r^2 H$$

Archimedes bewijst nu

$$|R - \varrho| < |R - h_1|$$

door op te merken, dat $2\varrho^2 = k^2 = 2Rh_1$ steeds inligt tusschen $2R^2$ en $2h_1^2$.

Nu is

$$\varrho(2R - \varrho) > h_1 h_2$$

waaruit door wederzijdsche optelling van $\varrho^2 = Rh_1$ en vermenigvuldiging van beide leden met h_1 volgt

$$\varrho \,.\, 2Rh_1 > h_1^2(h_2 + R)$$

of

$$\varrho k^2 > h_1 h_2 H$$

of

$$2\varrho^3 > r^2 H$$

HET NIEUWE WISKUNDE-LEERPLAN

DOOR

JOH. H. WANSINK.

Dank zij het initiatief van het Bestuur der Vereniging van Leraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Kosmographie aan Hogere Burgerscholen met vijfjarige cursus B, Lycea en Meisjes-Hogere-Burgerscholen met 5/6 jarige cursus, zijn de Nederlandse Wiskunde-leraren in de gelegenheid gesteld, vragen, die gerezen waren inzake de wijze van behandeling en de omvang der stof van verschillende onderwerpen, die in het nieuwe leerplan van 27 Mei 1937 voor de wiskunde aan de H. B. S. met 5-j. c. worden genoemd bij genoemd Bestuur in te dienen. Op de bijeenkomst, die Zaterdag 23 October j.l. te Amsterdam in „De Roode Leeuw" werd gehouden, en waar een 150 collega's door hun aanwezigheid er van getuigden, dat de aangebrachte wijzigingen hun grote belangstelling hadden, is de Inspecteur der Lycea, de heer J. van Andel zo welwillend geweest, de ingekomen vragen en de opmerkingen, die daaraan ter vergadering werden toegevoegd, te beantwoorden. Deze vergadering was een nieuw bewijs van de moeite, die de autoriteiten zich getroosten om de bedoelingen, die bij de aangebrachte wijzigingen hebben voorgezeten, kenbaar te maken aan hen, die met de uitvoering van het leerplan zijn belast. Wie de voorgeschiedenis van de totstandkoming van het leerplan 1937 kent, weet, dat de heer van Andel een waar woord sprak — dat bij de kritiek, die de laatste maanden over het leerplan wordt gehoord, wel eens wordt vergeten — toen hij ter vergadering zei: *„Het nieuwe leerplan is historisch gegroeid, niet van boven opgelegd."* — Ook is het ons Zaterdag 23 October duidelijk geworden, dat het nieuwe leerplan, ondanks het feit, dat het de leerstof meer detailleert dan het oude

leerplan dat deed, aan de docenten een *grote mate van vrijheid* laat, welke vrijheid voor vruchtdragend onderwijs niet anders dan bevorderlijk kan zijn. Door zijn uitvoerige beantwoording van de gestelde vragen heeft de heer J. van Andel veel misverstand kunnen wegnemen en geruststelling kunnen schenken aan hen, die zich door al wat er over het nieuwe program sinds Mei van dit jaar geschreven en gesproken was, hadden laten verontrusten.

Nadat de Voorzitter, Dr. J. Spijkerboer, de leden der Vereniging en de vele gasten en in het bijzonder de beide inspecteurs, de heren J. van Andel en C. de Bruyn, had welkom geheten, en de aandacht der aanwezigen had gevraagd voor het Congres van Leraren in de Wiskunde en in de Natuurwetenschappen, dat 25 April 1938 door de samenwerkende verenigingen in Utrecht zal worden gehouden, ging hij over tot de bespreking der ingekomen vragen, waaraan hij zijn eigen vragen had toegevoegd. Hij betrachtte de in den voorzitter prijzenswaardige objectiviteit zozeer, dat het voor de aanwezigen niet mogelijk was tussen de eigen vragen en de ingekomen vragen te onderscheiden. Terwille van de objectiviteit is er ook in de redactie der vragen weinig gewijzigd; ze zijn niet alle van gelijke waarde, er zijn enkele „vreemde" onder, ook herhaling van een zelfde punt kon niet geheel vermeden worden.

De Voorzitter verdeelde de vragenreeks in drie groepen, nl. in:

a. vragen van algemene strekking,
b. vragen, die betrekking hadden op de omvang van de nieuw ingevoerde leerstof en over de beperking van de oude,
c. vragen over de indeling van de beschikbare tijd.

Groep voor groep werden deze vragen door den Voorzitter aan de orde gesteld, waarna ze door den heer J. van Andel werden beantwoord. Daarna kregen de aanwezigen gelegenheid tot het maken van opmerkingen en tot het vragen van nadere toelichtingen. Er werden dus geen principes uitgevochten, de discussies droegen een zakelijk karakter; het nuttig effect, dat deze bijeenkomst kon hebben voor het op grond van het nieuwe leerplan te geven onderwijs, werd door deze wijze van doen zo hoog mogelijk opgevoerd.

Tot de vragen van de eerste groep [1]) behoorden de volgende:

---

[1]) Door welwillendheid van Dr. J. Spijkerboer en Dr. W. C. Post kreeg ik de beschikking over de juiste redactie der ingekomen vragen, die daardoor in dit artikel nauwkeuriger zijn weergegeven dan in mijn verslag in het Weekblad van 28 October 1937.

1°. In Den Haag doet een verhaal de ronde, volgens hetwelk de Minister tegen iemand, die zich voor het nieuwe leerplan interesseert, gezegd zou hebben: „Het zal nog wel wat vereenvoudigd worden!" Wat is hiervan waar?

2°. Het aantal voor Wiskunde bestemde uren is in de lagere klassen verminderd, en is voor de H. B. S. A. en de H. B. S. B. gelijk geworden. Volgt daaruit niet, dat de wiskunde in deze klassen een minder belangrijke plaats inneemt dan vroeger?

3°. In de tweede en derde klassen is het aantal lesuren van 6 op 5 gebracht. Is de leerstof voor Wiskunde in elk dier klassen eveneens met ongeveer $^1/_6$ verminderd?

4°. Quantitatief is de leerstof niet verminderd. Ligt in het feit, dat dus de qualiteit en de intensiteit moeten dalen, geen groot gevaar? Of staat men op het standpunt, dat er een scherpere selectie zal moeten worden toegepast?

5°. Geeft de door den oud-inspecteur Bolkestein medegedeelde interpretatie van het nieuwe leerplan de mening weer van het college van inspecteurs? M.a.w., is ook dat college van oordeel, dat de wiskunde der lagere klassen slechts waarde krijgt door wat later volgt?

6°. Wordt het niet als een groot gevaar van het leerplan gevoeld, dat het de mogelijkheid vergroot, dat de leerlingen zich de wiskunde gaan eigen maken, op de wijze, waarop ze in de z.g.n. „geheugenvakken" studeren? Zal niet dikwijls het „leren" van op zich zelf interessante wetenswaardigheden op wiskundig gebied het zo waardevolle aankweken der zelfwerkzaamheid verdringen?

7°. Kan thans reeds iets worden medegedeeld over de toekomstige inrichting van het eindexamen? Mag aangenomen worden, dat bij het schriftelijk gedeelte van het eindexamen der eerstvolgende jaren de onderwerpen, die in het nieuwe leerplan niet meer voorkomen, niet aan de orde zullen worden gesteld?

8°. Is het niet wenselijk, dat spoedig bekend wordt, of het de bedoeling is, dat de nieuw ingevoerde onderwerpen over enkele jaren alle of ten dele bij de opgaven voor het schriftelijk eindexamen ter sprake kunnen worden gebracht, en zo ja, in hoeverre?

9°. Bestaat er aanleiding om te vermoeden, dat over deze nieuwe onderwerpen bij het schriftelijk examen geen vragen zullen worden gesteld, maar dat zal worden voorgeschreven, dat ze als stof voor het mondeling examen gebruikt moeten worden en dat

in verband daarmee de mogelijkheid van vrijstelling van het mondeling examen zal worden afgeschaft?

Voor tot de beantwoording der vragen over te gaan betuigde de heer J. van Andel zijn blijdschap en dankbaarheid over de zo grote opkomst in een vergadering, waar het leerplan der Wiskunde aan de orde wordt gesteld. Vervolgens gaf hij een historische beschouwing over het ontstaan van het nieuwe program. In 1925 werd door de toenmalige inspecteurs bij het M.O. bij monde van Dr. Jensema een commissie ingesteld, die het college van inspecteurs zou hebben te adviseren over wijzigingen, die in het wiskunde-leerplan dienden te worden aangebracht. Deze commissie, die naar haar voorzitter en haar secretaris bekend kwam te staan als de „commissie Beth-Dijksterhuis", zond spoedig haar rapport in, dat vervolgens aan de Vereniging van Leraren in de Wiskunde enz. en aan de Vereniging van Directeuren werd toegezonden. In de pers rezen er tegen de plannen der Commissie nogal bezwaren. Het college van inspecteurs heeft gemeend aan de wensen der Commissie niet terstond gevolg te moeten geven: men vond het toen voorgestelde wel wat zwaar. Toch hebben de gedachten uit het rapport ook in die eerste periode reeds vrucht gedragen, zoals o.m. blijkt uit de plaats, die de grafieken in het onderwijs zijn gaan innemen. Enige jaren geleden is het rapport door een gewijzigde Commissie weer ter hand genomen. In Januari 1936 werd het gewijzigde leerplan door de Vereniging van Leraren in de Wiskunde enz. besproken. Aan het eind dezer vergadering werd een motie aangenomen, waarin o.m. de wenselijkheid van invoering der D. en I. rekening werd uitgesproken en waarin aangedrongen werd op vrijheid in het leerplan terwille van de zelfwerkzaamheid der leerlingen. Het Bestuur onzer Vereniging heeft zich daarna nogmaals met een brief tot de Inspectie gewend.

Als vrucht van dit alles is het nieuwe leerplan te beschouwen. Het is historisch gegroeid, niet van boven opgelegd.

Spr. stelt vervolgens de vraag: Wat is het doel van het wiskunde-onderwijs op de H. B. S.? Altijd heeft de gedachte op de voorgrond gestaan, dat niet allereerst het bijbrengen van technische kennis van een zekere leerstof, maar wel dat de scholing van het verstand het doel moet zijn, zó dat de leerlingen voor hun verdere taak, hetzij aan Universiteit of Hogeschool, hetzij in de Maatschappij worden voorbereid. Door stelselmatige oefening van het verstand

moet een zekere verstandsrijping worden gekregen. De geest van de leerling is niet een som van afzonderlijke potenties, maar een organisme, dat gevoed en ontwikkeld moet worden door het onderwijs in verschillende vakken. Samenwerking tussen die verschillende vakken is daartoe nodig.

Bij de beantwoording der gestelde vragen verzocht Spr. in hem geen opper-leraar te zien. Voorop moet steeds blijven staan, dat dit leerplan een grote mate van vrijheid aan de docenten wil laten. Er is dan ook geen voorschrijving te verwachten van wat er in onderdelen behandeld zal moeten worden en op welke wijze deze behandeling dient te geschieden.

Voorloopig is er in de onderwerpen voor het schriftelijk eindexamen niet de minste verandering te verwachten: het nieuwe moet rustig ingroeien. In de eerstvolgende jaren zal er dus niet over kegelsneden, niet over D. en I. rekening, niet over het getalbegrip worden gevraagd, en, zoals we er nu over denken, zegt Spr., zullen deze onderwerpen ook *nooit* op het schriftelijk eindexamen worden gevraagd.

Dril voor het schriftelijk eindexamen moeten we nooit in de hand werken. Men vreest, dat we te technisch worden bij het onderwijs, dat het begrijpen op de achtergrond raakt: dan zou het effect van de wijzigingen net andersom uitvallen dan we verwachten.

Er wordt in het nieuwe program gesproken over reken- en stelkunde, en over een herhaling der planimetrie met trigonometrische toepassingen. De bedoeling is geen andere dan deze: laten rekenen en algebra en laten meetkunde en driehoeksmeting niet zó gescheiden blijven, als dat wel eens placht te gebeuren.

Op de eerste vraag t.a.v. een verhaal dat in Den Haag de ronde zou doen geeft Spr. géén antwoord: we weten niets van kletspraatjes.

Op de vijfde vraag antwoordt hij, dat hij met den heer Bolkestein van mening is, dat als het wiskunde-onderwijs in de lagere klassen gegeven wordt, zoals deze zich dat voorstelt, waarbij dus het getalbegrip de aandacht zal krijgen, die het verdient, dat onderwijs alléén gegeven kan worden door dien bevoegden docent, die aan deze materie ook werkelijk aandacht schenken kan: men mag van de U.L.O.-leerkracht deze bevoegdheid niet verwachten.

Wiskunde-onderwijs in de lagere klassen heeft waarde in zich

zelf; onjuist is het te menen, dat het onderwijs daar gegeven eerst betekenis zou krijgen door het in de hogere klassen te geven vervolg. Een leerling, die na drie jaren de school verlaat, heeft volstrekt geen waardeloos onderwijs ontvangen. De leerstof daar behandeld is bovendien een goede grondslag voor het anders gerichte onderwijs, dat er in klasse IV en V op volgt.

Naar aanleiding van vragen gesteld door de heren Buzeman, Spijkerboer, Alders, Veldhuis, Wansink, Meyers, Tekelenburg, deelt de heer van Andel nog mee, dat er ten aanzien van de inrichting van het mondeling eindexamen nog geen enkele toezegging is te doen. Echter ligt het stellig in de lijn van dit leerplan, als de vrijstellingen zouden vervallen. Immers, als een deel der leerstof bij het schriftelijk eindexamen niet meer zal worden gevraagd, is het mondeling examen de plaats, waar het onderzoek over dat gedeelte wel zal moeten plaats hebben; een onderzoek niet alleen naar de kennis der zwakkere leerlingen, maar naar die van alle leerlingen.

Het is de bedoeling om niets nieuws bij het eindexamen in te voeren zonder voorafgaande tijdige waarschuwing.

Over de Reststelling, waarover b.v. heel mooie opgaven zijn te stellen, is tot dusver nooit gevraagd. Zou men dat in de toekomst wel willen doen, dan wordt dat op een zodanig ogenblik bekend gemaakt, dat men er bij het onderwijs rekening mee kan houden. Zolang geen officiële mededelingen zijn gedaan, mag men echter ook geen onderwerpen als vervallen beschouwen. Dit of dat staat niet meer in het leerplan, dat komt er dus voor het eindexamen ook niet meer bij, is een ontoelaatbare redenering. Voorlopig dient men met het oude program in de hogere klassen gewoon door te gaan; in zijn ijver om een zaak goed te krijgen kan men door overhaasting kwaad in plaats van goed doen. Wie de nieuwe stof behandelt op uren voor leerstof uit het oude program bestemd, handelt verkeerd. De nieuwe leerstof worde slechts dan onderwezen, als er ook uren voor op de rooster zijn uitgetrokken.

Vele der ideeën uit het rapport Beth-Dijksterhuis zijn reeds ingegroeid, die der vierdecimalige logarithmentafels echter nog niet. Spr. deelt het bezwaar niet van hen, die van oordeel zijn, dat het zo verwarrend werkt, dat de leerlingen voor bepaalde logarithmen de keuze hebben tussen een aantal gelijke hoekwaarden. Hij herinnert aan een woord van Prof. Ehrenfest, die het heus zo erg niet vond, als de mensen ervaren, dat ook in de exacte vakken alles niet

zo precies uitkomt. In elk geval zijn vierdecimalige tafels toegestaan. Ze waren ook voorheen reeds geoorloofd. De tweede trigonometrieopgave 1937 was op het gebruik van maximaal 4 decimalen gebaseerd. Of men dan in de A-afdelingen onzer H.B.S.en géén grote last zal ondervinden? Er zijn auteurs van tafels, die inderdaad op bezwaren hebben gewezen; of deze bezwaren wel algemeen zo sterk gevoeld zullen worden, zal nog moeten blijken. Vijfdecimalige tafels zijn echter niet verboden.

Vervolgens komen de vragen van de tweede groep aan de orde (omvang der leerstof). De Voorzitter noemt de volgende:

1°. Is er gegronde reden voor het vermoeden, dat den docent een grote vrijheid zal worden gelaten bij de keuze van onderwerpen uit de nieuwe leerstof?

2°. Mag het volgende schema voor de te behandelen stof als ongeveer juist worden beschouwd? Zo neen, in hoeverre zijn er dan wijzigingen nodig?

Eenvoudige beginselen der differentiaal- en integraalrekening: op het in klasse III ingevoerde limietbegrip wordt in klasse IV voortgebouwd. Invoering van het begrip differentiaalquotient voor een bepaalde waarde van de onafhankelijk veranderlijke. Het differentiëren van een gehele rationale algebraïsche functie, van de som van functies, van het product van functies, van het quotient van functies, van sin $(ax + b)$ en cos $(ax + b)$. Toepassing bij de bepaling van extrema. Toepassingen uit de kinematica. Voorts: de onbepaalde en de bepaalde integraal. Oppervlaktebepaling en inhoudsberekening.

3°. In welke uitgebreidheid moet de integraalrekening worden behandeld? Is het de bedoeling een integraal te definiëren als functie met voorgeschreven afgeleide, of als de limiet van een som, of worden beide behandelingswijzen verwacht? Zal een behandeling der inhouden en oppervlakten uit de stereometrie met behulp der integraalrekening niet achterstaan bij de thans gebruikelijke methoden?

4°. Hoe ver moeten we gaan met de bewerkingen met onnauwkeurige getallen? Welke van de volgende bewerkingen dienen behandeld te worden: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, kwadrateren, worteltrekken, alsmede:

$$\frac{1}{1+\delta}, (1+\delta)^2 \text{ en } \sqrt{(1+\delta)}.$$

5°. Behoeven voortaan hogere machtsvergelijkingen en wederkerige vergelijkingen niet besproken te worden?

6°. Wat moet er in de A-afdeling van de „Grafische Voorstellingen" behandeld worden?

7°. Is voor de klassen IV en V van de A-afdeling een logarithmentafel in vier decimalen wel voldoende?

8°. Wat moet er in klasse I aan het getalbegrip gedaan worden, en hoeveel lesuren zullen daar ongeveer voor nodig zijn? Verwacht men, dat de rekenkunde in de eerste klasse behandeld wordt zoals dat b.v. geschiedt in de „Beknopte Rekenkunde" van Wijdenes — een leerboek, dat naar het schijnt de plannen der Commissie-Beth weergeeft, of is het peil van het „Rekenboek" van denzelfden schrijver voldoende? Stelt men zich voor dat de rekenkunde veel zal moeten verschillen van de tegenwoordige toestand?

9°. Moeten de complexe (en imaginaire) getallen voor het eerst in klasse IV ter sprake komen?

10°. Moet in de vierde klasse de een of andere theorie van het irrationale getal behandeld worden? Indien het antwoord hierop ontkennend luidt, wat wordt dan bedoeld met: Herhaling en uitbreiding van het getalbegrip?

11°. Heeft herhaling en uitbreiding van het getalbegrip in de klassen IV en V de betekenis, daaraan gehecht door Dr. Beth bij zijn bespreking van het nieuwe leerplan in Euclides (13de jrg., no. 6). Zie zijn opmerking over de theorie van het complexe getal in de 5de klasse als sluitsteen op blz. 273.

12°. Kan de behandeling der kegelsneden zodanig zijn, dat deze materie aanleiding geeft tot het oplossen van vraagstukken?

13°. Mag men voor de behandeling der kegelsneden het volgende schema aannemen:

ellips: definitie, richtcirkel, raaklijn als bissectrix van de nevenhoek van de hoek tussen de voerstralen, de ellips als projectie van een cirkel, bespreking van de snijpunten met een rechte, raaklijn in een gegeven punt.

hyperbool en *parabool:* analoog.

14°. Voor de meetkunde in klasse II staat vermeld: berekeningen in rechthoekige en scheefhoekige driehoeken. Sluit dit allerlei bewijzen over lijnen en lijnstukken in een driehoek uit? Is hier dus een vereenvoudiging bedoeld?

15°. Mag men uit het feit, dat de constructies voor klasse III

niet meer genoemd worden, afleiden, dat constructies van gemeenschappelijke raaklijnen, constructies door middel van algebraïsche analyse en de constructies, die verband houden met een driehoek, waarvan o.a. basis en tophoek gegeven zijn, niet meer tot de leerstof behoren?

16°. Hoe ver moet men in de planimetrie met de goniometrie gaan? Wordt de behandeling der gelijkvormigheid daardoor nagenoeg verdrongen? Verdwijnt de projectiestelling? En de s-formule voor hoogtelijn en oppervlakte? De formules voor de zijde van de regelmatige veelhoek? $R = \frac{abc}{4\,O}$, enz. enz.?

17°. Wat wordt bedoeld met gelijkvormigheidstransformatie?

18°. Is het de bedoeling, dat de bol, kegel en cylinder reeds in klasse IV ter sprake komen, zoals bijv. in Beth: „Meetkunde van de ruimte", of houden we de gewone volgorde zonder de drievlakshoek, en komen we alleen maar tot de inhouden?

19°. Mag men uit de term „eenvoudige inhoudsberekeningen" afleiden dat de formules voor afgeknotte lichamen en voor de prismoïde vervallen?

20°. In het nieuwe leerplan voor de H. B. S. B 4de klasse staan de woorden: „met uitsluiting van de drievlakshoek". Is deze leerstof geheel uitgesloten, of is het de bedoeling, dat zij in de 5de klasse onderwezen wordt?

22°. Welk leerboek of welke leerboeken behandelen de Stereometrie op de aangegeven wijze?

23°. Is het wentelen van veelvlakken bij de beschrijvende meetkunde vervallen?

24°. Is het standpunt, dat Dr. Beth in zijn artikel in Euclides jrg. XIII, blz. 270 e.v. inneemt juist? Volgens dit artikel is de verdwijning van de zinsneden: „Herziening van de grondbeginselen der vlakke meetkunde. Logische bewijzen van vroeger intuïtief aanvaarde stellingen" slechts *schijn*. Deze verdwijning zou slechts een gevolg zijn van het streven, de stof in zo beknopt mogelijke vorm aan te geven.

25°. Wat verstaat men onder herhaling der planimetrie met trigonometrische toepassingen? Vraagstukken oplossen of de axioma's en stellingen nog eens nagaan in hun samenhang?

26°. Hoe moet de tijd gevonden voor de behandeling der nieuwe

stof? Door sterke beperking van de behandeling der wortelvormen in klasse II? Door beperking in het behandelen van vraagstukken met grote berekeningen? Door beperking bij het africhten op het maken van planimetrievraagstukken met uitvoerige berekeningen of ingewikkelde constructies? Door beperking bij het maken van stereometrie-vraagstukken met ingewikkelde berekeningen?

Naar aanleiding van de vragen over Algebra en Rekenen antwoordt de heer van Andel, dat hogere-machtsvergelijkingen en onbepaalde vergelijkingen niet meer worden gevraagd.

Uit het feit, dat bepaalde onderwerpen niet in het leerplan genoemd staan, mag men echter niet de conclusie trekken, dat ze niet onderwezen mogen worden: het blijft gewenst dingen te doen uit liefde voor het onderwerp zelf. Als men zich bij zijn onderwijs slechts laat leiden door het verlangen, de leerlingen klaar te stomen voor het eindexamen — óók de slechte — en de beteren worden de dupe, dan heeft men stellig kans op aanmerkingen van hoger hand.

Het is onjuist te menen, dat allerlei onderdelen, die in het leerplan niet genoemd zijn, maar zouden kunnen vervallen. Men heeft te zorgen, dat het geheel een gaaf geheel blijft: allerlei finesses behoeven niet te worden voorgeschreven.

De D. en I. rekening zal alleen als hulpvak voor de Mechanica en de Natuurkunde te beschouwen zijn. Men ga dus zover, als hiervoor nodig is, en als met het oog op het begripsvermogen van normale leerlingen mogelijk is. De intrede van de D. en I. rekening is in de natuurwetenschappen van zo grote betekenis geweest, dat men het niet anders dan waarderen kan, als de jonge mensen enigermate met deze begrippen vertrouwd worden gemaakt. Wat het getalbegrip betreft, hierover heeft de commissie heel wat moeten horen: het is geenszins de bedoeling leerlingen en leraren lasten op te leggen, die zij niet zouden kunnen dragen. De leerlingen moeten echter leren inzien, welke uitbreidingen het getalbegrip successievelijk ondergaat. Een behandeling van het complexe vlak hoewel in sommige omstandigheden mogelijk, is nooit voor het gehele onderwijs voor te schrijven.

Spr. zet vervolgens uiteen, dat het rekenonderwijs in klasse I voor een groot deel taalonderwijs is. Welk een nuttige oefening is het niet de leerlingen een behoorlijke opsomming te laten geven van de eigenschappen, die ze gebruiken, wanneer ze een vermenig-

vuldiging als 27 $\times$ 237 uitvoeren. Men behoeft over talstelsels en repeterende breuken niet te spreken.

De behandeling van de breuken in de algebra pleegt geen grote moeilijkheden op te leveren, als de leerlingen ze rekenkundig maar onder de knie hebben. Bij de wortelvormen zij men sober. Men treft in leerboeken nog steeds vraagstukken aan met in de noemer een som of verschil van hogere-machts-wortels, waarbij gevraagd wordt de breuk te „herleiden": het antwoord, dat verwacht wordt, is echter veel ingewikkelder dan de opgegeven breuk. Men neme toch een logarithmentafel, zoeke enige malen een logarithme op, en men vindt met weinig moeite het antwoord voldoende nauwkeurig.

Bij de gedachtenwisseling over dit onderdeel dringt de heer Mogendorff aan op verdere inperking der leerstof en prijst de heer Buzeman de vrijheid, die men met het nieuwe program in zijn hand houdt, terwijl de voorzitter constateert, dat we de eerste jaren voorzichtig zullen moeten blijven experimenteren.

Naar aanleiding van de ingekomen vragen over Meetkunde zegt de heer van Andel, dat er inderdaad bedoeld is t.a.v. de berekening van oppervlakten en inhouden tot een zekere besnoeiïng van de omvang der leerstof te komen, zoals er ook bij logarithmen, logarithmische en exponentiële vergelijkingen, vijfdecimalige logarithmen, vergelijkingen met kunstgrepen, en samengestelde interestrekening bezuiniging mogelijk is. Wat de uitbreiding der leerstof (kegelsneden) betreft, vergete men niet dat men in de vruchtbaarste jaren (kl. IV en V) één uur per week meer heeft. Men zij echter uiterst sober.

Vergelijkt men de plaats van de Wiskunde in ons program met die van de Natuurkunde, dan blijkt het laatste vak den docent veel meer aan banden te leggen. De Wiskunde is door de grote vrijheid in de leerstof niet het zwaarste vak.

De inhoudsberekeningen dient men te beperken. Men kan zeer goed de formule voor de prismoïde missen. Na interrupties uit de vergadering verklaart spr., dat men de formule voor de prismoïde in de toekomst handhave, wanneer men daarop prijs stelt. Men leide de inhoudsformules af zoals men dat het beste vindt, op de oude manier, of met de nieuwe stof. Als men het met integraalrekening minder nauwkeurig kan dan zonder, dan doe men het zonder haar.

Door de toevoeging van bol, kegel en cylinder is aan de leerstof

voor de beschrijvende meetkunde niets veranderd. Er waren leraren in het land, die uit het feit, dat in het examenprogram stond: „de B. M. tot aan de bol" de conclusie meenden te mogen trekken, dat men niet naar het middelpunt van de een of andere bol mocht vragen. Deze opvatting is voortaan niet meer mogelijk, maar dit betekent geen enkele verzwaring, geen leerstofuitbreiding. Wie een omtrek van een regelmatige veelhoek wil uitrekenen, kan daartoe de lange formules voor de lengte der zijden gevoeglijk missen. Met een logarithmentafel vindt men met heel weinig gecijfer zonder die planimetrische formules wat men wenst. De drievlakshoek mag in kl. IV wegblijven, maar moet in kl. V in verband met de boldriehoek zeker behandeld worden. Men binde zich niet aan bepaalde boeken: er zijn delen van de leerstof, die men ook zonder leerboek in vrijheid moet kunnen behandelen. Wat de logische bewijzen van vroeger intuïtief aanvaarde stellingen betreft zegt Spr.: lees wat de heer Beth er over schreef, doe er uw voordeel mee, maar handel in elk geval naar eigen inzicht.

Na de pauze komen de vragen aan de orde van de derde groep, die in verband staan met de verdeling van de beschikbare tijd.

Zullen de docenten, aldus vraagt de voorzitter, in verband met de noodzakelijkheid van voortdurende oefening, van het aanleren van nauwgezetheid, van het laten bezinken van de leerstof, niet een grote voorzichtigheid moeten betrachten bij de invoering van de nieuwe leerstof? En is het daarom niet gewenst vooral voor deze eerste periode van aanpassing door een schematisch overzicht een indruk te geven van de tijd, die voor de afzonderlijke onderwerpen beschikbaar zou kunnen worden gesteld?

De voorzitter onderwerpt dan het volgende schema aan het oordeel der vergadering.

Klasse I: 6 uren, waarvan 2 voor meetkunde, 4 voor reken- en stelkunde. Vóór de constructies worden de eenvoudigste eigenschappen van de cirkel behandeld. Voor de behandeling van de natuurlijke getallen, tot de invoering der gebroken getallen worden de eerste 2 maanden 4 uren uitgetrokken. Daarna blijft er voor de leerstof der rekenkunde tot en met de evenredigheden 1 uur gereserveerd. De hoofdbewerkingen met gehele vormen, enz. tot en met de vergelijkingen van de eerste graad krijgen na de eerste beide maanden 3 uren per week.

Hoofdrekenen en practische oefeningen blijven voortdurend aan de orde.

Klasse II: 5 uren, waarvan voor meetkunde 2 uren tot aan de Kerstvacantie, 3 uren daarna. Na de Kerstvacantie, als het begrip gelijkvormigheid is behandeld, wordt er aan de goniometrische verhoudingen met toepassingen en tafels 1 uur besteed.

Reken- en stelkunde: 3 uren tot de Kerstvacantie, 2 uren er na.

G.G.D., K.G.V., gebroken algebraïsche vormen tot de Kerstvacantie 1 uur. Worteltrekken, uitbreiding getalbegrip, eenvoudige bewerkingen met onnauwkeurige getallen, rechtstreeks en omgekeerd evenredige afhankelijkheid: 1 uur.

Coördinaten, functies, grafische voorstellingen, lineaire functies, lineaire vergelijkingen, afhankelijkheid en strijdigheid; rekenkundige reeks: 1 uur.

Klasse III: 5 uren, waarvan meetkunde 2 uren, reken- en stelkunde en goniometrie: 3 uren. Van deze 3 uren: 1 uur voor gebroken en negatieve exponenten, logarithmen en de goniometrie van de enkele hoek; 1 uur voor reeksen en limietbegrip en 1 uur voor de functie $y = ax^2 + bx + c$ en de vierkantsvergelijking.

Klasse IV: 5 uren, waarvan tot de Kerstvacantie 2 uren, na de Kerstvacantie 1 uur voor reken- en stelkunde; tot de Kerstvacantie 2 uren, na de Kerstvacantie 3 uren voor meetkunde; het gehele jaar 1 uur voor gonio- en trigonometrie. De uren voor meetkunde vóór de Kerstvacantie beide voor stereometrie, daarna 1 uur voor stereometrie, 1 uur voor beschrijvende meetkunde en 1 uur voor de kegelsneden en een herhaling van de planimetrie met trigonometrische toepassingen.

Klasse V: 5 uren, waarvan 1 voor reken- en stelkunde, 1 voor trigonometrie en 3 voor stereometrie en beschrijvende meetkunde.

Dit schema, dat gegeven wordt, zonder dat de bedoeling voorzit de leraren ook maar enigszins te binden, geeft geen aanleiding tot veel discussie. De heer Veldhuis wijst er nog op, hoe moeilijk het is de tijd nodig voor de behandeling van een bepaald onderdeel in uren uit te drukken: men kan een klas in een enkel uur de techniek van het differentiëren bijbrengen, men kan voor de bijbrenging van het begrip ook zeer vele uren nodig hebben. Nooit vergete men, dat niet alle leerstof examineerbaar en reproduceerbaar is, ook al is aan die leerstof veel tijd en zorg besteed. Dit geldt speciaal voor schriftelijke examens. Misschien dat het mondeling examen meer

gelegenheid biedt om te doen zien, wat er van verschillende onderwerpen werkelijk is begrepen dan het schriftelijk examen.

In zijn slotwoord dankt de Voorzitter allereerst de beide heren inspecteurs voor hun aanwezigheid op deze vergadering en den heer van Andel in het bijzonder voor de wijze waarop en de woorden die hij heeft gesproken. Voorts wekte hij de aanwezige die nog géén lid der Vereniging waren, op om lid te worden.

In verband met het informatorisch karakter van de bijeenkomst zal het niemand verwonderen, dat de gelegenheid tot het „doorpraten" van problemen heeft ontbroken.

Wie de lange lijst van ingekomen vragen, die in deze bijeenkomst, die nog géén twee en een half uur in beslag nam, doorziet, zal er nog menig punt ontdekken, dat in toekomstige afleveringen van *Euclides* waard is besproken te worden. Ondertussen mogen wij het Bestuur der Vereniging van Wiskundeleraren er dankbaar voor zijn, dat het deze bijeenkomst heeft georganiseerd.

DE TAFEL IN VIER DECIMALEN [1])

DOOR

P. WIJDENES.

Een K. B. regelt, wat reeds gedaan werd.

In het algemeen zal een Koninklijk besluit omtrent een of andere materie vastleggen, wat reeds zo langzamerhand algemeen gebruik was of waaraan algemeen behoefte wordt gevoeld. Om ons nu tot het nieuwe leerplan te bepalen, zien we daarin veel opgenomen, wat reeds een integrerend deel van de leerstof was geworden, tenzij dan op scholen, waar sleur tot verstening leidde. We noemen het functiebegrip en de grafieken van enkele functies, beide terecht eenvoudig en beperkt. De tijd is voorbij, waarin men op de vraag: „wat *is* $x^2 + 3x + 4$?" als voldoend antwoord rekende: „een vorm, een drieterm."

We lossen twee vergelijkingen met twee onbekenden op, niet enkel met getallen als coëfficienten, maar ook met letters; dat brengt ons vanzelf op de vraag of er waarden voor de letters zijn, waarvoor er eigenlijk maar één vergelijking is of waarvoor er geen oplossing is. Komt er na eliminatie van y b.v. $(a + b)\ x = b + c$, dan zal men ook eens nagaan, wat er gebeurt, als $a + b = 0$ is. Terecht vindt men in het leerplan: afhankelijk en strijdig.

Ook is de tijd voorbij, waarin alleen driehoeken gelijkvormig waren, hoogstens ook nog de veelhoeken. En driehoeken nog wel: „als de zijden evenredig zijn"; de hoeken gelijk zou in elk geval veel beter geweest zijn, want dat valt direct op. Vrij algemeen gebruikt men reeds een jaar of 20 de bepaling van „gelijkvormig" steunende op de vermenigvuldiging; heel kort aldus: F heet gelijkvormig met f, als $k\,.\,\mathrm{F} \cong f$ is.

Ik noem hier een drietal onderwerpen uit het leerplan, waarbij, zoals ik begon op te merken, het Koninklijk besluit als leerstof aangeeft, wat reeds vrij algemeen werd behandeld.

Anders is dit met de logarithmen in vier decimalen. We gaan eerst de geschiedenis na.

---

[1]) Dit artikel is geschreven voor de vergadering van 23 Oct., waarvan het vorige artikel zo'n uitstekend verslag geeft. Zoals men zal zien, behoefde ik in dit artikel niets te veranderen of terug te nemen.

orge- edenis n de r dec.

In jaargang II van het „Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde" (1925/26), herdoopt bij de vierde jaargang in „Euclides", heeft wijlen Dr Verrijp een artikeltje geschreven om op te komen voor een tafel in vier decimalen. We gaan dit niet op de voet na; onze zeer gewaardeerde medewerker is heengegaan en dus zullen we geen aanmerkingen op zijn artikel maken, zelfs geen opmerkingen er bij geven; ook het niet nogmaals onder de aandacht van de leraren brengen. Zoveel is intussen zeker, dat de heer Verrijp zelf allerminst overtuigd was van wat hij schreef; immers naast zijn kleine tafel werd Versluys Tafel H op het Arnhemse gymnasium gebruikt; ieder kent die tafel; de meest uitgebreide tafel in 5 decimalen, die we in ons land hebben (mijn gegevens lopen van 1923 tot het aftreden van Dr Verrijp; de lezers weten, dat dit nog maar een jaar of drie geleden is). Zo gering was de invloed van het artikel en zo weinig serieus werd het opgenomen, dat men, evenmin als hij zelf, de tafel met 5 decimalen afschafte om over te gaan tot een tafel in 4 decimalen.

ls met deci- alen rden ts door kelen ruikt.

Volgens een opgave van Noordhoff, die op mijn vraag een overzicht maakte, waren er voor de cursus 1936/37 (de afgelopen cursus dus) 203 scholen, die een logarithmentafel in 5 decimalen gebruikten, tegen 13, die een tafel in 4 decimalen op hun boekenlijst hadden staan. De tafel in 4 dec. van Dr. Hallo en Van Eek werd volgens die gegevens gebruikt in Den Haag op de 2e en 5e H.B.S. met 5-jarige cursus, op het Stedelijk en Nederlands Lyceum in Den Haag, op de H.B.S. met Handelsschool in Den Haag, bij „Tijmstra" in Den Haag en als 7e school op de bijzondere H.B.S. in Utrecht. De tafel van Vaes wordt op 2 scholen in Rotterdam gebruikt, op het Leidse Gymnasium en het Lorentz-gymnasium in Eindhoven en op de M.T.S. in Heerlen. Dat zijn ze dan alle 13; misschien is er nog een enkele; daartegenover staat, dat er meerdere scholen ontbreken, waar ze een tafel met 5 decimalen gebruiken. De verhouding 1 op de 17 zal vrij nauwkeurig zijn.

waren els in dec.

We hadden in ons land (velen wisten dat waarschijnlijk niet) al enige tafels in 4 decimalen; aan pogingen om die ingang te doen vinden, heeft het niet ontbroken. Reeds in 1919 gaf Dr Gonggrijp zijn Zaktafels in vier decimalen uit; evenals de andere tafels van Dr Gonggrijp uitstekend, zeer goed doordacht werk; de prijs gecartonneerd (52 blz.) in het wel zeer dure jaar 1919 was *f* 1.25. Het debiet? Ik heb het den uitgever gevraagd .... van 1919 af nog

geen 5 per jaar! In 1920 kwamen Dr Hallo en Van Eek met hun tafel in vier decimalen gecartonneerd 61 blz. *f* 2.—; niettegenstaande het plaatselijke gebruik heeft die tafel er 17 jaar over gedaan om tot een herdruk te komen. In 1927 is er nog een tafel in 4 decimalen verschenen van Dr Van de Vliet; 50 blz., 90 ct.; ik vrees, dat de verkoop al evenmin vlot gaat.... er werden immers geen tafels in vier decimalen gebruikt dan alleen in Den Haag en Rotterdam (samen 9 van de 13). Alleen de acht bladzijden tafel van Dr Verrijp liep wat beter, maar het debiet liep sterk achteruit; volgens de opgave van den uitgever was het aantal van 1926 af gemiddeld 130 per jaar. Waarom deze zoveel beter dan de andere? Waarschijnlijk, omdat de tafel van Dr Verrijp allerlei constanten bevat, die men bij het oplossen van vraagstukken over natuurkunde, werktuigkunde en scheikunde nodig heeft. [1]) Wat men op de Middelbare technische, op de Machinistenschool, in Delft met de rekenliniaal doet, kan men inderdaad met een tafel in 4 decimalen doen, ... maar . . . . daarvoor is een heel kleine tafel, in de geest van die van Dr Verrijp voldoende. De tafel zou aan de ene kant wat meer, aan de andere kant minder moeten bevatten; voldoende zou zijn: de logarithmen van de getallen van 1—2000; de goniometrische functies en ook hun logarithmen, de hoeken opklimmende met 6′ of 10′; allerlei andere tafels en tafeltjes; om er een paar te noemen: soortelijke gewichten, warmteconstanten, atoomgewichten, weerstanden van verschillende stoffen, enz. enz. Zo'n tafel zou hoogstens een 30 bladzijden groot mogen zijn; altijd bij de hand, ook bij repetities en examens in de toegepaste vakken. Dr Verrijp heeft iets gedaan in die richting; geslaagd is zijn poging echter niet.

Het bovenstaande heeft *de commissie* waarschijnlijk voor ogen gezweefd; voor wie de voorgeschiedenis niet zo precies weten, het volgende.

Het ontwerp van 1925. „De commissie" (H. J. E. Beth voorzitter, J. van Andel en P. Cramer leden, E. J. Dijksterhuis secretaris) heeft, zie jaargang II van het Bijvoegsel 1925/26, een *Ontwerp van een leerplan voor het onderwijs in wiskunde, mechanica en kosmographie op de H. B. Scholen met vijfjarige cursus opgesteld.* Daarin vindt men: „gebruik van de logarithmentafel met vier decimalen" en als enige

[1]) Deze tafel wordt nl. hier en daar gebruikt naast een tafel in 5 dec.

toelichting: „Beperking van het logarithmisch rekenwerk door invoering van tafels in vier decimalen".

Nu maak ik me sterk, neen ik weet zeker, dat geen van de vier leden, toen ze dat neerschreven, ooit gewerkt hadden met de tafel in vier decimalen; waarschijnlijk hebben ze enkel maar gedacht: „ja, dat zal wel makkelijker zijn." Dat idee is in de twaalf jaar, die na het verschijnen van het rapport verliepen, blijkbaar door het overgrote merendeel van de leraren niet overgenomen, getuige (en daarom heb ik de cijfers vermeld) het zeer geringe succes van de toen reeds bestaande tafels in vier decimalen. Alle leraren waren in de gelegenheid het althans te proberen; ik vermoed echter, dat er slechts enkelen het gedaan hebben. De aangehaalde woorden uit het ontwerp zijn volkomen zonder uitwerking gebleven; andere wensen en wenken hebben in de twaalf jaar wel degelijk enige, enkele zelfs veel, invloed uitgeoefend. Er is heel wat te doen geweest om het „Ontwerp"; geen enkele verdediger, geen enkele bestrijder heeft een woord gerept over de vier decimalen.

K. B. mt de fel in r dec.

Wat wel niemand verwachtte, gebeurde: het Koninklijk besluit noemde de tafel in vier decimalen. Ik meen, dat dit over het geheel met instemming werd begroet: „al weer van wat last bevrijd"; een oordeel als van de leden van de commissie: „het zal wel makkelijker zijn." Nauwelijks 1 op de 17 scholen, dus 1 op de 17 leraren ook, had ondervinding opgedaan met zo'n kleine tafel. Ik had die ook niet, maar kwam wel heel spoedig in de gelegenheid er kennis mee te maken; er moest nl. een volgende druk verschijnen van Nieuwe Schoolalgebra II en III; in deel II moesten de logarithmen worden opgenomen (I en II bevatten voortaan de stof voor de klassen 1, 2 en 3; III voor 4 en 5 B). Daar er ook andere scholen zijn dan hogere burgerscholen, nl. gymnasia, lycea, middelbare technische en zeevaartscholen hebben we de bewerkingen met vijf decimalen behouden en die met vier decimalen er bij gegeven.

ls het daan d, was goed.

Reeds in alle vorige drukken van deel III heb ik bij de bewerkingen met logarithmen nagegaan, hoe het met de nauwkeurigheid van de uitkomst stond; ik had zo dikwijls gezien, dat men maar wat gedachteloos optelde, aftrok en terugzocht. Gedachteloos is eigenlijk veel te zacht uitgedrukt voor de domheid, die men begaat, als men bij log x nauwkeurig op 6 e_5 (e_5 betekent eenheid van de 5e decimaal, dus 10^{-5}), zes cijfers terugzoekt. Of men zich echter heel veel gestoord heeft aan de kleine letters naast de bewerkingen,

betwijfel ik; hoogstens bleef het tot een paar keer beperkt. Wel verre van dat den leraren kwalijk te nemen, geef ik hun groot gelijk. Het is immers niet mogelijk dit vol te houden; twee, drie keer is genoeg en daarna: „in geen geval 6 cijfers terugzoeken; bij een simpele bewerking kun je er op aan, dat je in 't eerste deel van de tafel 5 goede cijfers vindt; 4 of 3 zijn er zeker te vertrouwen; dus opzoeken, optellen, aftrekken, terugzoeken en verder geen gezeur." Ik meen te weten, dat dit algemeen gedaan werd en niemand zich bezwaard gevoelde door: „eigenlijk bedrieg ik ze; maar wat nood, al te kritisch zijn ze nog niet." Inderdaad, het was goed tot heden met die vijf decimalen, heel goed. Of ze vier of vijf cijfers moeten optellen of aftrekken, dat scheelt toch niets; of ze in een zijrij moeten zien voor interpolatie, geeft toch geen moeite. *Het juiste begrip van interpolatie* met een figuur als deze, *moet* worden bijgebracht, behoort bij wiskundige scholing. Zie hier, wat er in Nieuwe Schoolalgebra III stond; 1e—5e druk.

Begrip van interpolatie is nodig.

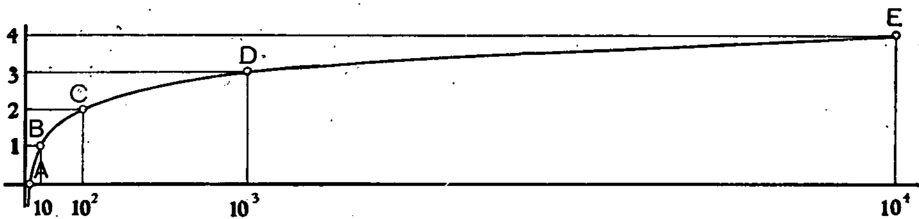


Fig. 82.

De grafiek van $y = {}^{10}\log x$ geeft een kromme, die bij een abscis 1000 slechts een ordinaat 3 vertoont; we kunnen wegens deze wanverhouding hiervan geen behoorlijke figuur maken; we moeten dus een figuur geven, die er op lijkt, maar in werkelijkheid niet de juiste verhoudingen geeft; wel is er voor gezorgd, dat de abscissen een meetkundige reeks vormen bij de ordinaten 1, 2, 3 en 4 (zie fig. 82). We hebben nu deze waarden van het argument en de functie:

Argument.	Functie.
1 —10	0—1
10 —10^2	1—2
10^2—10^3	2—3
10^3—10^4	3—4

Bij dezelfde stijging van één eenheid van de functie heeft men telkens een 10-maal zo grote aanwas van het argument; *omgekeerd zal dus bij een zelfde aangroeiing van het argument de waarde van de functie steeds langzamer aangroeien;* in de logarithmentafel is

dat direct te zien; bij de aangroeiing van het getal van 100 tot 200 stijgt de logarithme van 2 tot 2,30103, bij die van 1100 tot 1200 b.v. van 3,04139 tot 3,07918.

Op fig. 83 ziet men een klein stuk van $y = {}^{10}\log x$; de ordinaten zijn niet de juiste, omdat een rijzing van 10 in het argument slechts een rijzing van 0,03 in de logarithme met zich brengt, hetgeen weer niet op juiste schaal is te tekenen.

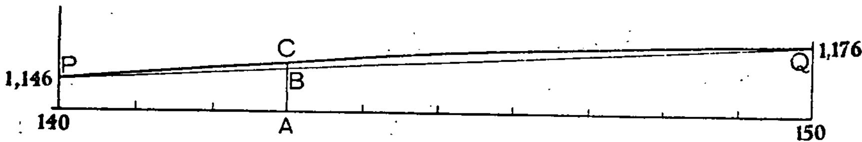


Fig. 83.

Als men nu voor log 143 neemt log 140 + $\frac{3}{10}$ (log 150—log 140), dan zegt men daarbij niets anders, dan dat men voor de logarithmen van tussenliggende getallen de ordinaten neemt van de koorde PQ, dat is AB in plaats van AC; hoe minder verschil er is tussen de ordinaten van P en van Q, hoe nauwkeuriger kan men AB voor AC nemen. Omdat de kromme, hoe verder men naar rechts gaat, voortdurend voor een zelfde toename van x minder stijgt en *dus de kromme tussen twee van zijn punten minder afwijkt van de koorde, zal de evenredige interpolatie nauwkeuriger worden, naarmate de getallen groter worden.*

Tot zover het boek; het begrip interpoleren komt heus niet enkel in de wiskunde voor; in elk geval moet het worden aangebracht, niet enkel bij de reeksen. Die „beperking" van het cijferwerk, die de commissie meende te moeten aanvoeren om de vervanging te rechtvaardigen, betekent niets. Ik zou menen, dat men van de middelbare school ook nog wel mag eisen, dat de leerlingen een bewerking als deze met vijf cijfers achter de komma zonder fouten kunnen maken. In elk geval heel wat nuttiger en nodiger, dan dat men de leerlingen africht op ondingen als de berekening van x uit

$$\frac{{}^{x-2}\log 3}{{}^{10}\log 9} = \frac{1}{{}^{10}\log(x^2 - x - 8) + {}^{10}\log\frac{3}{4}},$$

waarmee veel tijd en moeite verloren gaat zonder enig aanwijsbaar nut voor de wiskundige ontwikkeling of voor de practijk.

Logarithmen zijn benaderde getallen.

Voorbeeld van een berekening.

$$x = \frac{279{,}6 \times 716{,}5}{1{,}6325 \times \sqrt[3]{2}}.$$

$\log 1{,}6325 = 0{,}21286 \ldots 1$
$\frac{1}{3} \log 2 = 0{,}10034 \ldots \frac{1}{3}$
$+$ ———
$0{,}31320 \ldots 1\frac{1}{3}$

$\log 279{,}6 = 2{,}44654 \ldots \frac{1}{2}$
$\log 716{,}5 = 2{,}85522 \ldots \frac{1}{2}$
$+$ ———
$5{,}30176 \ldots 1$
$6{,}31320 \ldots 1\frac{1}{3} \leftarrow$
$-$ ———

$\log x = 4{,}98856 \ldots 2\frac{1}{3}; \quad x = 97400$

nauwkeurig op 10; immers de cijfers 9740 zijn te verantwoorden; dat men dat *niet* doet, dat verantwoorden, bij het gebruik van een tafel met 5 decimalen is een zeer goede gewoonte; de algemeen gevolgde, waarop geen enkele aanmerking is te maken. Toevallig staat dit getal in de tafel; hadden we terug te zoeken bij log x = 4,98866, dan zouden we zetten 97420 en niet een vijfde cijfer met de zijrij bepalen; van „bepalen" is immers geen sprake; log x *is niet* 4,98856; de kleine cijfers in de berekening wijzen de maximale afwijkingen aan in de laatste decimaal; dus is

In log x = p is p nk op enige e_5.

$$4{,}988535 < \log x < 4{,}988585$$

en

$$97395 < x < 97405,$$

zodat 97400 inderdaad nauwkeurig is op een tiental.

Is het nu inderdaad zoveel minder werk, als men in elk getal één cijfer minder heeft? Men zal kunnen zeggen: „het weglaten van het laatste rijtje geeft toch kleinere getallen, dus in elk geval gemakkelijker." Ware het niet, dat er een *groot nadeel* tegenover stond, dan had ik er ook vrede mee. Ik maak nu dezelfde bewerking met de tafel in 4 decimalen en zal dan het nadeel aanwijzen.

$\log 279{,}6 = 2{,}4465$
$\log 716{,}5 = 2{,}8552$
$+$ ———
$5{,}3017$
$0{,}3132 \leftarrow$
$-$ ———

$\log 1{,}6325 = 0{,}2129$
$\frac{1}{3} \log 2 = 0{,}1003$
$+$ ———
$0{,}3132$

$\log x = 4{,}9885.$

We hebben bij het terugzoeken de keus tussen 97380 en 97390; *moeten* we een keuze doen? Neen, ... we *moeten* zeggen, dat beide fout zijn; we *moeten* spreken over benaderde waarden en we *moeten* ze leren, 97400 op te schrijven, dat echter behoort bij 4,9886! Breng

het ze maar eens bij! *Opzoeken, optellen, aftrekken, terugzoeken en dan maar net doen of het in orde is, is bij gebruik van een tafel in vier decimalen volstrekt ongeoorloofd.* Erger .... 97400 is slechts in de eerste drie cijfers verantwoord; de fout, dat is de maximale afwijking in de laatste decimaal van log x is immers $2\frac{1}{2}\ e_4$; log x *is niet* 4,9885; maar $4{,}98825 < \log x < 4{,}98875$ en dus

$$97330 < x < 97450.$$

Zoals men ziet, zijn beide getallen 97380 en 97390, waarvan een leerling er een zal opschrijven, fout; ongetwijfeld stelt hij U voor de keus en dan moet U zeggen, dat ze geen van beide goed zijn; het antwoord is 97400 nauwkeurig op 100; bij gebruik van een tafel in vijf decimalen is 97400 nauwkeurig op 10. Het grote nadeel van de tafel in vier decimalen is: *bij elk vraagstuk moet men de fout, dat is de maximale afwijking in log x, bepalen en dan met twee ongelijkheden het interval van log x opschrijven of zich voorstellen en daarop laten volgen het interval van x en daarna x zo nauwkeurig mogelijk bepalen.* Maar aan die eis is niet te voldoen; een zeer behoorlijke kennis van bewerkingen met benaderde getallen mogen en kunnen we niet eisen; enig begrip ervan is goed, heel goed en ook wel aan te brengen. Volstrekt uitgesloten is de vaardige behandeling. Stoort men zich bij het gebruik van de tafel in 4 decimalen nergens aan, dan deugt er niets van en de logarithmische bewerkingen zijn een aanfluiting van de wiskunde. Hieronder laat ik enige bewerkingen volgen in vier decimalen en in vijf decimalen; de laatste, zoals die *zeer terecht door ieder worden gemaakt, zonder enige bijschrijving en zonder de overwegingen, die er naast staan.* Wat klein gedrukt is bij de bewerkingen met vier decimalen mag niet worden weggelaten, wil niet alles er bezijden zijn.

1a. $x = 0{,}4961 \times 3{,}1422 \times 91{,}68$

log 0,4961 = 0,6956 — 1
log 3,1422 = 0,4972
log 91,68 = 1,9623
+ ———
log x = 2,1551
x = 142,9

In de tafel zijn de logarithmen nauwkeurig op $\frac{1}{2}e_4$ ($= \frac{1}{2}\ .\ 10^{-4}$); de log van het tweede getal is nog gevonden met behulp van de zijrij; deze is dus nauwkeurig op $1e_4$. De eerste en de derde log zijn nauwkeurig op $\frac{1}{2}e_4$; de som dus op $2e_4$. Dat betekent, dat log x ligt tusschen 2,1549 en 2,1553; daar de differentie in die buurt $3e_4$ is, betekent dit, dat $x = 142{,}9$ nog net nauwkeurig is op één tiende.

1b. $x = 0{,}4961 \times 3{,}1422 \times 91{,}682.$

$$\begin{aligned}
\log 0{,}4961 &= 0{,}69557 - 1 \\
\log 3{,}1422 &= 0{,}49724 \\
\log 91{,}682 &= 1{,}96228 \\
&+ \overline{\qquad\qquad} \\
\log x &= 2{,}15509 \\
x &= 142{,}92
\end{aligned}$$

In de tafel zijn de log nauwkeurig op $\frac{1}{2}e_5$. Elk der bijvoegingen uit de zijrij is ook nk. op $\frac{1}{2}e_5$, de som op $3e_5$; log x ligt tussen 2,155065 en 2,155115, x dus tussen 142,911 en 142,928. Het antwoord is dus nk. op $^1/_{100}$.

2a. $x = \dfrac{9{,}551}{1{,}599}.$

$$\begin{aligned}
\log 9{,}551 &= 0{,}9800 \\
\log 1{,}599 &= 0{,}2038 \\
&- \overline{\qquad\qquad} \\
\log x &= 0{,}7762 \\
x &= 5{,}97
\end{aligned}$$

De log van deeltal en deler zijn beide nauwkeurig op $\frac{1}{2}e_4$, hun verschil dus op $1e_4$; dat is: log x ligt tussen 0,7761 en 0,7763, dus x tussen 5,972 en 5,975; we kunnen dus x slechts in twee decimalen nauwkeurig geven, nl. 5,97.

2b. $x = \dfrac{9{,}5507}{1{,}5992}.$

$$\begin{aligned}
\log 9{,}5507 &= 0{,}98004 \\
\log 1{,}5992 &= 0{,}20390 \\
&- \overline{\qquad\qquad} \\
\log x &= 0{,}77614 \\
x &= 5{,}972
\end{aligned}$$

De log van deeltal en deler zijn elk nk. op $1e_5$; dus het verschil op $2e_5$; log x is dus gelegen tussen 0,77612 en 0,77616 en x tussen 5,9720 en 5,9726, zodat 5,972 nk. is op 1 duizendste te klein.

3a. $x = \dfrac{0{,}014256}{4{,}6925}.$

$$\begin{aligned}
\log 0{,}014256 &= \overset{1}{\not 0},1540 - \overset{3}{\not 2} \quad (\tfrac{1}{2} \text{ voor 1 gerekend}) \\
\log 4{,}6925 &= 0{,}6715 \\
&- \overline{\qquad\qquad} \\
\log x &= 0{,}4825 - 3 \\
x &= 0{,}00304
\end{aligned}$$

Daar beide logarithmen met behulp van de zijrij zijn bepaald, is elk nauwkeurig op $1e_4$; hun verschil dus op $2e_4$. Dat betekent, dat log x ligt tussen 0,4823 — 3 en 0,4827 — 3, dus x tussen 0,003036 en 0,003039; x is dus 0,00304, nauwkeurig op 1 eenheid van de laatste decimaal.

3b. $x = \dfrac{0.014256}{4{,}6925}.$

$$\begin{aligned}
\log 0{,}014256 &= \overset{1}{\not 0},15400 - \overset{3}{\not 2} \\
\log 4{,}6925 &= 0{,}67141 \\
&- \overline{\qquad\qquad} \\
\log x &= 0{,}48259 - 3 \\
x &= 0{,}0030380
\end{aligned}$$

log x is nauwkeurig op $2e_5$;
$0{,}48257 - 3 < \log x < 0{,}48261 - 3$
$0{,}0030379 < x < 0{,}0030381$,
zodat de gevonden waarde nauwkeurig is op $1e_7$.

Ondergetekende, abonné op { „Christiaan Huygens" / „N. T. voor Wiskunde" / „Euclides" }

verzoekt toezending van 1 exemplaar: *)

SCHUH, LEERBOEK DER TECHNISCHE THEORETISCHE MECHANICA I

geb. in heel linnen à ƒ 7.00 (gewone prijs is ƒ 8.50)
ingenaaid . . . à - 5.75 („ „ „ - 7.25)

WIJDENES, BEGINSELEN VAN DE GETALLENLEER

geb. in heel linnen à ƒ 4.75 (gewone prijs is ƒ 5 25)
ingenaaid . . . à - 4.00 („ „ „ - 4.50)

door bemiddeling van de boekhandel
direct per post,

....

Naam: Woonplaats:

....

*) S.v.p. door te halen wat niet wordt verlangd.
Ieder abonné heeft slechts recht op 1 ex., mits besteld vóór 1 Maart 1938; voor Indië vóór 1 April 1938.

BESTELKAART VOOR BOEKWERKEN.

1½ cts.
postzegel

N.V. Erven P. NOORDHOFF'S

Uitgeverszaak.

Postbus 39.

Giro Ned. Bk. No. 1858
Post Giro No. 6593

GRONINGEN.

PROSPECTUS

NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA

DOOR

P. WIJDENES
AMSTERDAM

EN

Dr. H. J. E. BETH
DIRECTEUR VAN DE R.H.B.S. TE AMERSFOORT

DE DRIE DELEN GEHEEL IN OVEREENSTEMMING MET HET LEERPLAN 1937

De uitgever biedt hen, die de Nieuwe Schoolalgebra op hun school gebruiken of invoeren, voor klasse-gebruik aan een pres. ex. van Wijdenes:

12 WANDPLATEN MET GRAFIEKEN, groot 66 bij 56 cm, met zwarte figuren op groene ruiten, geplakt op carton, prijs . *f* 11.—
Verkleinde reproducties van de 12 wandplaten . . . . . *f* 0,40

P. NOORDHOFF N.V. — 1938 — GRONINGEN-BATAVIA

INHOUD VAN DEEL I

156 bladzijden; 21 figuren; geb. *f* 2,25.

INHOUD VAN DEEL II.

204 bladzijden; 50 figuren; geb. *f* 2,25.

INHOUD VAN DEEL III.

199 bladzijden; 69 figuren; geb. ƒ 2,25.

NIEUWE SCHOOLALGEBRA.

I. **Negende druk.** 156 blz. 21 fig. geb. *f* 2,25.
II. **Achtste druk.** 204 blz. 50 fig. geb. *f* 2,25.
III. **Zesde druk.** 198 blz. 69 fig. geb. *f* 2,25.
Deel I en II geven de volledige stof voor de klassen 1, 2 en 3, deel III voor de 4e en 5e van de H.B.S. B.

Het Koninklijk besluit van 27 Mei 1937 heeft slechts weinig verandering nodig gemaakt in de Nieuwe Schoolalgebra. Deel I kon onveranderd worden herdrukt; daarover hebben we dus niets te zeggen.

DEEL II.

De herziening van deel II en van deel III lag reeds klaar voor de herdruk, toen het nieuwe leerplan verscheen; het enige, wat we te doen hadden, was de volgorde hier en daar wat te wijzigen en den zetter daarvoor de nodige aanwijzingen te geven. Er waren hoofdstukken, die uit deel III moesten worden overgebracht naar deel II nl. de oneigenlijke machten, de logarithmen en de reeksen, enkele kleinere uit II naar III. De herhaling aan het eind van deel II werd verzet naar blz. 114 en volgende; deze is een behoorlijke afscheiding tussen de lineaire en kwadratische functies, vergelijkingen en ongelijkheden en de uit III overgehevelde leerstof. Aan het eind van deel II komt dan de vijfde herhaling.

Wezenlijke veranderingen in behandeling bracht de invoering van het nieuwe program niet mee, immers de Nieuwe Schoolalgebra behandelde reeds in aard en uitgebreidheid of beperktheid, wat in het Koninklijk besluit is neergelegd.

Wortels en oneigenlijke machten.

We verzoeken de collega's deel II blz. 50 en volgende op te slaan; de titel van het hoofdstuk is: *Vierkantswortels*. Voor hetgeen volgt op dit hoofdstuk (blz. 72—113) hebben we die alleen nodig; de meetkunde eist evenmin de hogere wortels; met de herhaling op blz. 69 hebben we ruimschoots voldaan aan de behoefte aan

„wortels"; de zeer grote beperking maakt tijd vrij voor betere dingen. „Waar de hogere wortels dan blijven?" Zie op blz. 127 de alinea, die begint met „Eigenschappen . . ."; die vier regels zeggen precies, wat onze bedoeling is en als men dan nog leest tot de vraagstukken op blz. 128, dan ziet men, hoe de hogere wortels en de oneigenlijke machten zijn teruggebracht tot een minimum, evenredig aan hun wel zeer kleine belang voor de wiskundige vorming; ook de vraagstukken zijn eenvoudig gehouden. Geeft § 60 genoeg of niet? Naar onze mening meer dan voldoende. De behandeling in § 55 van de oneigenlijke machten is veel verbeterd. Vroeger zei men (wij ook): „$\sqrt[3]{a^2}$ stellen we voor door $a^{\frac{2}{3}}$ en nu zullen we eens nagaan of de eigenschappen van de machten nog doorgaan", Dit blijkt dan inderdaad het geval te zijn. Wij hebben de zaak omgedraaid; zie de eerste alinea van § 55 en de dik gedrukte vragen met de antwoorden op blz. 124 en het cursief gedrukte onderaan. Deze manier is beter en eenvoudiger.

De splitsing in wat nodig is, dat is een behoorlijke techniek met vierkantswortels, en een klein beetje hogere wortels, tegelijk te behandelen met de oneigenlijke machten, zal blijken een grote verbetering te zijn. Zou men bij de vierkantswortels alles schrappen, wat weinig voorkomt, dan zou men kunnen volstaan met de helft van het aantal bladzijden, dat is overgebleven. Daar vaardigheid in het werken met vierkantswortels in elk geval geëist mag worden, hebben we niet nog meer besnoeid.

ogarithmen. De logarithmen zijn uit deel III naar deel II overgebracht; van wezenlijke verandering is geen sprake. Hier en daar is wat bekort; in het bijzonder in de paragrafen 69 en 70. De overdrijving in de logarithmenpuzzles, gevolg van jaren en jaren lang examineren; hebben we ingeperkt tot wat redelijk is; hetzelfde geldt voor de logarithmische en exponentiële vergelijkingen. Wat er overblijft is ruim voldoende; toegevoegd zijn slechts voorbeeld 9 van blz. 158 en de vraagstukken 18, 19 en 20 van blz. 159; deze zijn nuttig en nodig.

Over de vier decimalen alleen dit: we hebben naast de vier de vijf behouden, ten eerste omdat ook op andere scholen dan H.B.S. de Nieuwe Schoolalgebra gebruikt wordt en ten tweede, omdat zeker een deel van de leraren, zo niet een groot deel, bij de vijf decimalen blijft. Men zie verder een artikel in Euclides XIV, afl. 2/3, 1937/38.

Reeksen. Tweemaal staan de rekenkundige reeksen in het programma; voor de eerste ronde hebben we ons er afgemaakt met een halve bladzijde (8 onderaan en 9 bovenaan); dat is genoeg; §71—74, zie blz. 161—171, geeft alles, wat nodig is; de omvang is twee bladzijden minder dan in de 5e druk van deel III.

Bij de behandeling van de meetkundige reeksen vonden wij het gewenst eerst de eindigende reeksen in enige bladzijden af te doen en daarna als inleiding tot de oneindige reeksen het begrip limiet van een variant aan te brengen. Dit laatste (blz. 178—181) met eenvoudige woorden, voorbeelden en grafieken en in een tiental vraagstukjes. Het misverstand van de leerlingen, dat limieten er alleen zijn voor $S = \frac{a}{r-1}$ wordt daarmee uit de wereld geholpen. Op het laatst wordt dan na een terugblik de definitie gegeven (zie blz. 185). Wie hier ter plaatse meer aan limieten doet, doet o.i. verkeerd.

Als toepassing hebben we 4 bladzijden gewijd aan de samengestelde intrestrekening en nog $3^1/_2$ bladzijde met vraagstukken. We weten, dat vele leraren een kreet van verluchting slaakten, toen ze ontwaarden, dat het Koninklijk besluit die door jarenlang examineren tot in het onzinnige uitgedijde intrestrekening niet meer noemde! Ons dunkt, dat wat er overbleef, voldoende is en in elk geval de moeite van het behandelen waard. Veel en veel meer dan rariteiten van limieten, die met een foefje gemaakt kunnen worden zonder enig begrip of ineengestrengelde logarithmen.

DEEL III.

Deel I en II geven de volledige stof voor de klassen 1, 2 en 3 van de H.B.S.; een splitsing in drie deeltjes, voor elke keer één, is wel zo wat mogelijk, maar is o.i. onnodig. Bovendien: de Nieuwe Schoolalgebra is steeds geweest een boek van drie delen met de volledige stof voor de H.B.S.; deel IV en het uittreksel IVβ waren voor de β-afdeling van het Gymnasium. Schrijvers en uitgever besloten daarom het werk, zoals het opgang gemaakt heeft, in dezelfde vorm te behouden.

Deel III heeft vooral de invloed van het Koninklijk besluit ondergaan en wel met name door toevoegingen van het hoofdstuk

over irrationale getallen en van de eerste beginselen van de analyse. Voor we daarover een en ander zeggen, vermelden we, dat de irrationale vergelijkingen van deel II naar III zijn overgebracht; daar behoren ze ook inderdaad thuis.

rrationale ergelijkingen. Wat de behandeling betreft, kan men twee standpunten innemen: 1) „kwadraten maar"; een, twee of meer keer en kijk dan op het eind of je geen, een of twee wortels hebt. Wie deze manier voorstaat, doet beter de irrationale vergelijkingen weg te laten; zo'n behandeling heeft immers met wiskunde weinig uit te staan; ze komen verder zelden voor, dus dan maar opruimen.

2) „Bezint, voor gij begint". Dat hadden we natuurlijk ook reeds gedaan in de vorige drukken; toch bevredigde ons de behandeling niet. De irrationale vergelijkingen worden niet behandeld om de techniek, niet om het veelvuldig voorkomen; als men ze wil behouden, wat ons wel goed voorkomt, dan moet het gerechtvaardigd zijn wegens de wiskundige behandeling. We menen, dat theorie en voorbeelden van § 42 de toets der critiek kunnen doorstaan.

et irrationale getal. Het hoofdstuk over de irrationale getallen wordt ingeleid door voorafgaande uitbreidingen van het getalbegrip; we verwijzen naar de overzichten op blz. 65, blz. 73 en blz. 83. Dit hoofdstukje is heel eenvoudig gehouden en uitsluitend bestemd voor mondelinge behandeling; ook zonder opgaven. Wie zich in deze materie wil inwerken, zij gewezen op de uitbreidingen van het getalbegrip in Wijdenes *Lagere Algebra I*, 3e druk blz. 17—25 (invoering van de negatieve gehele getallen), blz. 113—115 (van de breuken), blz. 140—149 en blz. 198—200, van de irrationale getallen) en blz. 228—232 (van de complexen). Een meer volledige beschouwing over de irrationale getallen vindt men in de 2de druk van Wijdenes *Middel-Algebra* blz. 135—160. Diepgaande, omvangrijke studie bevat het boek van Prof. Dr. F. Schuh: *Het getalbegrip, in het bijzonder het onmeetbare getal* [1]). Hierin vindt men vier theoriën over het onmeetbare getal nl. van Cantor (blz. 37—74), van Dedekind (blz. 75—105), van onzen langgenoot Baudet (1891—1921) (blz. 106—121) en van Weierstrass blz. 122—147).

---

[1]) Deel 13 van *Noordhoff's Wiskundige werken;* 268 blz., geb. prijs *f* 4,65.

Bewijzen door volledige inductie. Nieuw is het hoofdstukje (blz. 12—15) over bewijzen door volledige inductie; deze methode van bewijs wordt zo dikwijls toegepast en moest zoveel meer uitdrukkelijk worden genoemd, dat ze o.i. een plaatsje verdiende in een modern algebraboek.

De gebroken functiës. Wij hadden en hebben nog:

1. $y = \frac{ax+b}{px+q}$; **2.** $y = \frac{ax^2+bx+c}{px+q}$; **3.** $y = \frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$.

Het Koninklijk besluit noemt **2** niet; nu kan men wel zeggen, dat **2** in **3** besloten is door $p = 0$ te nemen, maar daarmee is men er niet. Gold dit argument, dan hoefde men ook **1** niet te noemen. Er is wat anders, dat **2** van **3** onderscheidt: **3** heeft één asymptoot evenwijdig aan de X-as en 2, 1 of geen evenwijdig aan de Y-as; **2** heeft daarentegen een schuine asymptoot (en nog een evenwijdig aan de Y-as). Er is dus veel verschil, heel veel; **1** en vooral **2** zijn figuren, die de leerlingen elders ook krijgen (zie blz. 25 en 26); ook in de Vlakke Meetkunde en op het eind van de Stereometrie. **1** is een orthogonale hyperbool, **2** een hyperbool. Maar **3** is een kromme van de derde graad, feitelijk zonder aanwijsbaar nut voor de wiskundige ontwikkeling. De behandeling van de verschillende gevallen is een heel werk, ver uitgaande boven het vermogen van den gemiddelden leerling. Heel sterk zijn we gekant tegen een behandeling met differentiaalrekening.

De functie onder **3** genoemd is in vorige drukken behandeld, omdat deze voorkwam op het Staatsexamen, later dus op de eindexamens Gymnasium. Door kleine letter hebben we aangewezen, dat het geen verplichte leerstof was voor de H.B.S. Nu wel, maar we menen toch, dat de school genoeg te doen zal hebben met **1.** $y = \frac{ax+b}{px+q}$ en **2.** $y = \frac{ax^2+bx+c}{px+q}$. We hebben dit bedoeld, toen we den zetter order gaven alles over **1** en **2** met gewone letter te zetten, maar alles over **3** klein te houden.

De zesde herhaling. Met de zesde herhaling van blz. 116—137 is de gewone stof afgehandeld. Collega's zie a.u.b. die herhaling eens rustig door; is dat bereikbaar of niet? Allemaal kleine vraagstukjes van de kracht van het eindexamen. Sleurtypen zijn het niet; dat was reeds zo; dat is inhaerent aan de Nieuwe Schoolalgebra. Dat het onderwijs gebaseerd op het nieuwe leerplan de weg volgt, die ons boek aanwees, is ons een grote genoegdoening.

nieuwe leerstof. Nu komen we aan de differentiaal- en integraalrekening; de hele omvang is niet meer dan 46 blz. met inbegrip van de vraagstukken. Dit is nodig om te voldoen aan de eisen van het Koninklijk besluit, ook voldoende; de theorie is eenvoudig en beknopt, de opgaven zijn zeer eenvoudig. Dit is leerstof, die in hoge mate bijdraagt tot de ontwikkeling van het wiskundig begrijpen en die bovendien de deur opent voor verdere studie. Men denke toch vooral niet, dat de analyse er alleen is voor de studie in wis- en natuurkundige vakken, beide in de meest uitgebreide zin, nl. met de technische vakken, die er op steunen. Ook de economie en heel wat andere vakken, waarvan de meesten dit niet zouden vermoeden, eisen bij wetenschappelijke beoefening de analyse.

In elk geval is het nut van deze leerstof veel, veel hoger dan van een eindeloze mechaniek met wortelvormen en oneigenlijke machten; vandaar onze sterke beperking daarvan; ook veel belangrijker dan de logarithmenpuzzles, ook ingekrompen; dan de rekenkundige reeksen, eveneens bekort; het belang van een behandeling van $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ voor wiskundige scholing is uiterst gering, bovendien lastig en tijdrovend.

Zoals men heeft kunnen lezen, gelden onze opmerkingen over het leerplan 1937 slechts drie ondergeschikte punten; (aanmerkingen hebben we helemaal niet) en wel:

1) Liever niets in de tweede klas over rekenkundige reeksen.

2) Vrijheid om een tafel in 4 of in 5 decimalen te gebruiken. Deze is reeds verleend bij monde van de inspecteurs Van Andel en De Bruyn op de vergadering van 23 Oct. 1937.

3) $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ te vervangen door $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q}$.

Dit is alles; wij hebben in de Nieuwe Schoolalgebra onze wensen kenbaar gemaakt door de rekenkundige reeksen in klasse 2 af te doen in een halve bladzijde; door naast de 4 decimalen de 5 te behouden en door alles over de functie $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ klein te drukken.

Amsterdam } Dec. 1937.
Amersfoort }

P. WIJDENES.
H. J. E. BETH.

P. WIJDENES

MIDDEL-ALGEBRA

TWEEDE DRUK

INHOUD.

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING.

BETH, Dr. H. J. E., **Inleiding tot de Differentiaal- en Integraalrekening,** met toepassingen op verschillende gebieden, ...	geb.	*f* 11.50
Antwoorden		- 1.—
LANDAU, Prof. Dr. EDMUND, **Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung**	geb.	- 13.50
VAN OS, Prof. Dr. C. H., **Inleiding tot de Functietheorie,** . . .	geb.	- 5.75
VAN OS, Prof. Dr. C. H., **Moderne Integraalrekening,** Inleiding tot de leer der puntverzamelingen en der integralen van Lebesque,	geb.	- 3.45
RUTGERS, Prof. Dr. J. G. en Prof. Dr. F. SCHUH, **Compendium der Hogere Wiskunde III,**	geb.	- 9.—
Deel IV	geb.	- 15.50
SCHOUTEN, Prof. Dr. G., **Inleiding tot de studie der elliptische functies,** in slap linnen bandje		- 1.60
SCHUH, Prof. Dr. F., **Vraagstukken over Diff. en Int. rek. en over Anal. en Beschr. Meetkunde.** Met volledige aanwijzingen ter oplossing.		
Deel I A, Vraagstukken over Differentiaalrekening . . .	gec.	- 4.90
Deel II, Schriftelijke vraagstukken van het examen K V . .	gec.	- 4.60
Supplementen van 1923 tot heden	à	- 0.75
Deel III, Vraagstukken over Diff. en Int. rekening . . .	gec.	- 8.85
SCHUH, Prof. Dr. F., **Oneindige producten** (met aanhangsel over gelijkmatige convergentie en gammafuncties)	geb.	- 2.95
SCHUH, Prof. Dr. F., **Het Getalbegrip, in het bijzonder het onmeetbare getal,** met toepassingen op algebra, differentiaal- en integraalrekening	geb.	- 4.65
STIELTJES, TH. J., **Oeuvres complètes I, II** samen		- 35.—
in leer gebonden		- 47.50
VERRIEST, GUSTAVE, **Cours de Mathématiques générales,** 1e partie, Calcul différentiel, Géométrie Analytique à deux dimensions, **2e druk**	geb.	- 6.—
2e partie, Géométrie Analytique à trois dimensions, Calcul intégral	geb.	- 6.—
VRIES, Prof. Dr. Hk. DE, **Leerboek der Differentiaal- en Integraalrekening en van de theorie der Differentiaalvergelijkingen.**		
I. De differentiaal- en elementaire integraalrekening, **2e druk**	geb.	- 19.20
II. Integraalrekening	geb.	- 16.50
III. Differentiaalvergelijkingen	geb.	- 19.20
prijs voor de drie delen samen		- 48.—
VRIES, Prof. Dr. Hk. DE, **Beknopt Leerboek der Differentiaal- en Integraalrekening** met 73 figuren	geb.	- 15.—
WEITZENBÖCK, Prof. Dr. R., **Invariantentheorie** *f* 5.—, . .	geb.	- 6.—
WOLFF, Prof. Dr., J., **Fouriersche Reihen mit Aufgaben** . . .	geb.	- 2.40

SCHOOLBOEKEN OVER DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAAL-REKENING.

VOOREN, Dr. W. L. VAN DE, **Grenswaarden, 2e druk** . . .	geb.	*f* 3.—
WIJDENES, P. en Dr. H. J. E. BETH, **Nieuwe Schoolalgebra IV,**	geb.	- 2.25
„ „ „ **Nieuwe Schoolagebra IVβ** . . .		- 0.80
VISSER, K. H. W., **Analytische Meetkunde, Differentiaal- en Integraalrekening, vooral voor M.T.S.**		- 1.75

UITGAVEN P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

PROSPECTUS

LEERBOEK DER TECHNISCHE THEORETISCHE MECHANICA

DOOR

IR. J. F. SCHUH E. I.

ADVISEREND INGENIEUR TE 'S-GRAVENHAGE

EERSTE DEEL

ALGEMENE GRONDSLAGEN DER THEORETISCHE MECHANICA



**Prijs f 7.25, geb. f 8.50.
Voor abonné's Christ. Huygens, Euclides en N. Tijdschr. v. Wisk. tot 1 Maart 1938 à f 5.75, geb. à f 7.00.**

1937

UITGAVE P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN — BATAVIA

**Ook verkrijgbaar door bemiddeling van de boekhandel en bij
N.V. Uitgevers-Maatschappij NOORDHOFF-KOLFF, Laan Holle 7, Batavia C**

VOORBERICHT.

Dit leerboek is in de eerste plaats gericht tot studenten aan Technische Hogescholen, voor wie de theoretische mechanica een studievak is, en verder aan ingenieurs en allen, die interesse hebben in de grondslagen der theoretische mechanica, speciaal met het oog op de technische toepassingen daarvan. Het woord „theoretische mechanica" heeft de schrijver opgevat op de in Holland gebruikelijke manier van „mechanica van afzonderlijke materiële punten, vaste lichamen en daaruit opgebouwde mechanismen". Hiermee vallen de aerodynamica, de hydrodynamica en de dynamica en statica van elastische lichamen (meestal „toegepaste mechanica" genoemd) dus buiten het bestek van dit leerboek. Het gehele werk zal in twee delen verschijnen. In het eerste deel worden de algemene grondslagen der theoretische mechanica ontwikkeld, waardoor dit deel wellicht ook voor anderen dan technici van nut kan zijn, speciaal door zijn uitgebreide en gevarieerde collectie zeer verzorgde opgaven, ontleend aan de examens, afgenomen aan de Technische Hogeschool te Delft. (Deze opgaven zijn nagenoeg alle afkomstig van *Prof. Dr. F. Schuh*, hoogleraar aan voornoemde instelling). Daar het bereiken van hogere resultaten zonder grondige kennis en oplossingstechniek van matig zware opgaven uitgesloten is, meent de schrijver het eerste deel van zijn werk ook te kunnen aanbevelen aan de studenten der Universiteiten, welke in anders gespecialiseerde richtingen verder in de theoretische mechanica wensen door te dringen, in het bijzonder ter overwinning der eerste moeilijkheden. Gedacht wordt hier speciaal aan *physici, chemici* en *astronomen.*

In het tweede deel zullen daarentegen specifiek technische problemen, welke op het terrein der theoretische mechanica liggen, behandeld worden. Ter sprake zullen daar o.a. komen: De theorie der tandwielen, mechanisch-kinematische problemen zich voordoende bij transmissies, het uitbalanceren van krukassen door middel van tegengewichten en andere stabiliteitsproblemen, de theorie der gyrostaten, trillingen in machinerieën, enz.

We beperken ons hier tot enkele opmerkingen betreffende het hiermee verschijnende eerste deel. Het doel, dat de schrijver hierin voortdurend voor ogen gehad heeft, is, zo beknopt mogelijk, doch zonder daardoor onvolledig of incorrect te worden, den lezer in de behandelde onderwerpen in te leiden; in hoeverre dit doel ook werkelijk bereikt is, zal uit de kritiek moeten blijken. In dit deel zal de lezer dus slechts kunnen vinden, wat in vele andere leerboeken eveneens te vinden is; de theorie is hierin ontwikkeld op een wijze, zoals men die ongeveer in de eerste hoofdstukken van „*A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, by E. T. WHITTAKER" vinden kan.

Na een inleiding over de eenvoudige bewerkingen met vectoren, alsmede de theorie der momenten, volgen hoofdstukken over de kinematica van het punt en het beginsel van *König*. Daarna worden, uitgaande van de axioma's van *Newton*, de bewegingsvergelijkingen van materiële punten en vaste lichamen afgeleid, waarna, na enige (zeer elementaire) beschouwingen betreffende krachtvelden, de vergelijkingen van *Lagrange* en *Hamilton* volgen. Het enige, dat in dit deel een weinig afwijkt van de gebruikelijke gang van

zaken, is een beschouwing betreffende de arbeid door stootkrachten verricht (zie 8 . 3, pag. 148; vergelijk de behandeling van dit onderwerp b.v. in *Leerboek der Theoretische Mechanica* door Dr. F. SCHUH, of *Vorlesungen über Technische Mechanik* von A. FÖPPL; in het reeds genoemde werk van WHITTAKER is over dit onderwerp niets te vinden).

Na de uiteenzetting der theorie volgen 22 volledig uitgewerkte voorbeelden, waarvan enkele een zuiver op de techniek gerichte tendens hebben, de meesten echter, wat dit laatste punt betreft, volkomen neutraal zijn. Ter beoordeling van de verschillende oplossingsmethoden, waartoe vele problemen aanleiding geven, zijn van vele voorbeelden meerdere oplossingen gegeven. In het algemeen is daarbij één oplossing als hoofdoplossing gegeven, en is in de „opmerkingen" aangegeven, hoe andere oplossingsmethoden eveneens tot het gezochte resultaat kunnen leiden, doch vaak met aanmerkelijk meer moeite. Overigens is het werk zo ingericht, dat het bestuderen van het hoofdstuk over de vergelijkingen van *Lagrange* (Hoofdstuk VI) kan worden overgeslagen. In de voorbeelden is de oplossingsmethode van *Lagrange* dan ook overal in de opmerkingen behandeld, ook daar, waar deze oplossingsmethode de snelste en eenvoudigste geweest zou zijn. Een uitzondering hierop maken slechts de in 8 . 21 en 8 . 3 verkregen resultaten, daar deze, zonder dat men van de vergelijkingen van *Lagrange* gebruik maakt, zeer omslachtig te verkrijgen zijn (Een bewijs dezer resultaten, waarbij de vergelijkingen van *Lagrange* niet gebruikt zijn, vindt men in het reeds vermelde leerboek van *Prof. Dr. F. Schuh*).

Van den lezer wordt verondersteld, dat hij bekend is met de beginselen der differentiaal- en integraalrekening inclusief de theorie der gewone differentiaalvergelijkingen. Bovendien zijn in een „*Mathematisch Aanhangsel*" enige veel gebruikte stellingen uit de wiskunde kort besproken. Verder wordt verondersteld, dat de lezer een grondige kennis bezit van de elementaire mechanica, zoals deze hier te lande bij het middelbaar onderwijs gedoceerd wordt. Voor het verwerven dezer kennis verwijzen wij speciaal naar: *Leerboek der Mechanica voor het Middelbaar Onderwijs*, door Prof. Dr. F. SCHUH en B. J. VAN TROTSENBURG (Uitgave van *Sijthoff*, Leiden).

Ten slotte rust op mij nog de aangename taak aan enkelen, die tot het ontstaan van dit werk hebben bijgedragen, mijn dank te betuigen. In de eerste plaats geldt dit mijn vader, niet omdat deze directe medewerking verleend heeft, doch omdat diens bezielende colleges en meer nog de persoonlijke discussies en debatten, welke ik met hem over verschillende wiskundige en mechanische onderwerpen gevoerd heb, mijn persoonlijk wiskundig denken zodanig beïnvloed hebben, dat het met recht betwijfeld mag worden, of ik, zonder die discussies, tot het schrijven van dit leerboek in staat geweest zou zijn. Aan de heren Ir. D. J. PRONK en Ir. P. VAN ROSSEN, welke alle drukproeven hebben doorgelezen, heb ik menige verbetering te danken, waarvoor hen hier eveneens de welverdiende dank gebracht wordt. Ook de Firma NOORDHOFF te Groningen, welke de verzorging en uitgave van het werk op zich genomen heeft, ben ik zeer erkentelijk.

's-Gravenhage, Augustus 1937. J. F. SCHUH.

INHOUD.

Voor de nummering der paragrafen is een decimaal systeem gebruikt. Dit systeem is het eerst gebruikt door den Italiaansen wiskundige Peano.

HOOFDSTUK I.

VECTOREN EN VECTORSTELSELS.

HOOFDSTUK II.

KINEMATICA.

HOOFDSTUK III.

THEORIE DER LEVENDE KRACHT.

HOOFDSTUK IV.

ALGEMENE EN BIJZONDERE BEWEGINGSVERGELIJKINGEN.

HOOFDSTUK V.

THEORIE DER KRACHTVELDEN.

HOOFDSTUK VI.

DE VERGELIJKINGEN VAN LAGRANGE VOOR HOLONOME MECHANISMEN.

HOOFDSTUK VII.

OPLOSSING VAN VRAAGSTUKKEN.

HOOFDSTUK VIII.

DE BOTSING.

HOOFDSTUK IX.

VOORBEELDEN.

MATHEMATISCH AANHANGSEL.

OPGAVEN.

4a. $x = 1{,}257^9$.

$$\begin{array}{r} \log 1{,}257 = 0{,}0993 \\ 9 \\ \hline \times \\ \log x = 0{,}8937 \\ x = 7{,}8. \end{array}$$

In de theorie van de benaderde waarden noemen we de mogelijke afwijking *„de fout"*; „de fout" van alle getallen in de tafel is $\frac{1}{2}e_4$ (dat is: een halve eenheid van de 4e decimaal). De fout in het 9-voud is dus $4\frac{1}{2}e_4$; er staat wel $\log x = 0{,}8937$, maar het moet zijn $0{,}89325 < \log x < 0{,}89415$ (zo iets natuurlijk ook bij 1*a*, 2*a* en 3*a*; daar hebben we nog alles omschreven). We vinden $7{,}819 < x < 7{,}838$, zodat $x = 7{,}8$ nauwkeurig is op $^1/_{10}$.

4b. $x = 1{,}2574^9$. We zoeken op $\log 1{,}2574 = 0{,}09948$ en moeten deze met 9 vermenigvuldigen; we weten niet, hoe 0,09934 ($= \log 1{,}257$) is ontstaan, door verhoging of verlaging met een halve eenheid van de laatste decimaal; wel weten we, dat we 14 nemen voor 13,6 uit de zijrij en dat we door 9×14 te nemen, in plaats van $9 \times 13{,}6$, te veel nemen $9 \times 0{,}4$, dat is ongeveer $4\ e_5$. We gaan in zo'n geval als volgt te werk:

$$\begin{array}{r} \log 1{,}2574 = 0{,}09947_6 \\ 9 \\ \hline \times \\ \log x = 0{,}89528 \\ x = 7{,}86. \end{array}$$

De „fout" in $\log x$ is $9 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 5e_5$; $\log x$ ligt tussen 0,89523 en 0,89533; x dus tussen 7,8565 en 7,8583; x is 7,86, nauwkeurig op $^1/_{100}$ te groot.

Het gaat niet aan bij elk vraagstuk alle overwegingen te geven, zoals in de voorbeelden hierboven; wel is het nodig, ze voor zich zelf te maken en ze kort neer te schrijven; zie de volgende voorbeelden.

Daarin betekent f *de fout,* dat is de *maximale* afwijking naar boven of beneden in eenheden van de laatste decimaal.

5a. $x = 1{,}463^8 \times 0{,}04253^2$.

$$\begin{array}{lll} \log 1{,}463 = 0{,}1652 & & \\ \hline \times 8 = 1{,}3216 & & \ldots f = 4 \\ \log 0{,}04253 = 0{,}6287 - 2 & & \\ \hline \times 2 = 0{,}2574 - 3 & & \ldots f = 2 \\ + \hline + & & \\ \log x = 1{,}5790 - 3 & & \ldots f = 6 \end{array}$$

Denk nu zo: de grenzen voor $\log x$ zijn 5784 en 5796; bij het eerste getal behoort 3788, bij het laatste 3796; 379 is dus betrouwbaar met een fout < 1; dus $x = 0{,}00379$ op $1e_5$ nauwkeurig. Let vooral op, dat: $\log x = \ldots$ aan het eind van een bewerking eigenlijk

moet zijn ... < log x < ... ; we doen dat niet, maar zetten de fout er achter.

5b. $x = 1{,}463^8 \times 0{,}04253^2$.

$$
\begin{array}{lll}
\log 1{,}463 = 0{,}16524 & & \\
\quad\text{———} \times 8 & = 1{,}32192 & \ldots f = 4 \\
\log 0{,}04253 = 0{,}62870 - 2 & & \\
\quad\text{———} \times 2 & = 0{,}25740 - 3 & \ldots f = 2 \\
 & \text{———} + & \\
 & \log x = 0{,}57932 - 2 & \ldots f = 6
\end{array}
$$

Denk nu zo: de laatste drie cijfers van log x tussen 926 en 938, *beide* tussen 921 en 944, die in de tafel naast 933 staan; dus is 6 als laatste cijfer nauwkeurig; dan pas opschrijven x = 0,03796.

Wat de strekking is van al het vorige? Ik zal het U kort uiteenzetten.

Hoe deed men het? Wat is de practijk op school van het rekenen met de logarithmen in vijf decimalen? Deze, dat men de bewerkingen voordoet en laat maken als de voorbeelden 1b, 2b, 3b, 4b en 5b zonder de kleine letters; evenmin eist men de overwegingen, die er naast staan. Hoogstens doet men er twee of drie eens heel secuur voor, enkel om de leerlingen ervan te doordringen, dat men bij het terugzoeken aan het eind van een bewerking gedwongen is zich te beperken tot 4 cijfers. Dat er gevallen zijn, waarbij er niet meer dan 3 juiste cijfers komen, andere, waarbij er 5 betrouwbaar zijn, mag men eens laten zien, maar als men er over zwijgt, is het ook niet erg. *Zoals men het deed, was het goed.*

Enkel maar opzoeken, een paar bewerkingen uitvoeren en terugzoeken is bij gebruik van een tafel in vijf decimalen niet geheel in de haak; men laat het er echter bij en m.i. terecht; van een bespreking bij elke berekening, zoals in de voorbeelden, is geen sprake; ten eerste is het niet vol te houden; een tweede reden is, dat velen het begrip benaderde waarde niet aanbrachten, er zeker geen bewerkingen mee maakten, zoals men die vindt in het tweede deeltje van Wijdenes en De Lange Rekenboek voor de H. B. S.

Vier decimalen. Bij gebruik van een tafel in vier decimalen is dezelfde manier als tot heden werd gevolgd, gevaarlijk, zoals in het vorige met voorbeelden is aangetoond; men *moet* werken met benaderde waarden. Nu zegt het Koninklijk besluit onder Rekenkunde in de tweede klas: *eenvoudige bewerkingen met onnauwkeurige getallen;*

maar goed ook, want de tafel in vier decimalen *eist* de bewerkingen. Kan men met een tafel in 5 decimalen genoegen nemen met wat niet geheel door de beugel kan, omdat men in alle voorkomende gevallen nog wel op vier of drie cijfers kan vertrouwen in het antwoord, uitgesloten is dit, als men een tafel in vier decimalen gebruikt. Men is verplicht elke bewerking na te gaan op de manier, als bij de voorbeelden met de letter *a*. Doet men het niet, zoekt men bij 4*a* terug 7,828 of 7,829 (men heeft de keus!) dan zijn ze beide fout; dan maar 7,83; maar ook dat is nog fout, 7,83 is immers niet nauwkeurig op $1e_2$.

De tafel met 4 decimalen zal blijken veel last te veroorzaken; dat deed die in 5 decimalen niet, integendeel.

Wij hebben in het belang van leraren en leerlingen de bewerkingen met 5 decimalen behouden en geven in overweging voort te gaan, zoals altijd gedaan is; het was goed.

Opgemerkt zij nog, dat de tafel in 4 decimalen voor de A-afdeling onbruikbaar is; de leerlingen, die naar die afdeling overgaan, moeten zich in de 4e klas oefenen in het gebruik van een tafel in 5 decimalen; niet dat dit zo erg is of veel tijd neemt, maar het brengt dubbele kosten mee.

over ...g sin ...fel.

Enkele woorden voeg ik hieraan toe over de gonio- en trigonometrie; daar gelden de bezwaren veel en veel sterker. Zie maar; uit een bewerking komt

log cos $x = 9{,}9912 - 10$ met een fout van $6e_4$
dus $9{,}9906-10 < \log\cos x < 9{,}9918-10$
$11°54' > x > 11°3'$; met 51′ speling dus.

Zeg ze maar eens: „op een minuut nauwkeurig, jongens". Zelfs, als men zich helemaal niet stoort aan de ongelijkheden, dan hebben ze nog keuze uit 4 opeenvolgende aantallen minuten.

log sin $x = 9{,}9971-10$; nu zullen we ons aan geen grenzen storen; (durft een van U dat aan met een tafel in vier decimalen?); „zoek terug"; „er zijn er 7, welke moeten we nemen, m'neer?"

In de logarithmensinustafel met 5 decimalen zijn de differenties van 52° af $10e_5$ of minder; in een tafel met 4 decimalen dus $1e_4$ of minder; dit betekent, dat er, zeg van 53° af, reeds twee zelfde getallen kunnen voorkomen; bv. $9{,}9041 - 10 = \log\sin 53°18'$, maar ook log sin 53°19′. Dus is een hoek x van 53° af niet meer nauwkeurig te bepalen op een minuut door log sin x; nog al een

flink interval! Een hoek y tot 37° niet door log cos y. In een tafel met 5 decimalen komt zo iets natuurlijk ook voor, echter in veel beperkter mate; daar staat de afronding er veel gunstiger voor. Vindt men log cos $x = 9{,}99125—10$ met een fout van $6e_5$; dus

$$9{,}99119—10 < \log\cos x < 9{,}99131—10$$
$$11°30' > x > 11°25'$$; met 5′ speling.

Wat is nu de practijk? Wel deze: log cos $x = 9{,}99125—10$; $x = 11°28'$ nl. het aantal minuten, dat bij het getal 9,99124 behoort, dat er het dichtst bij is. Hoewel het niet helemaal in orde is, meen ik, dat we in dezen goed doen de weg te blijven bewandelen, die we steeds gegaan zijn. Een enkele keer het eens heel correct doen is gewenst; dit vol te houden is volslagen ondoenlijk. We kunnen en zullen eisen bij het ingeleverde schriftelijke werk, dat ze achter log sin $x = 9{,}99714—10$ zetten $x = 83°26'$; wat kunnen we eisen achter log sin $x = 9{,}9971—10$? Hiermee eindig ik met de logarithmen-sinustafel; sla ook maar de tafel van de goniometrische functies op; daar gelden dezelfde bezwaren. [1])

Ik maak me sterk, dat velen, dat de meesten na de proefneming met de vier decimalen weer tot de vijf terugkeren: *ongelijk veel minder last, geen uitleg van de bewerkingen met benaderde waarden, geen keuze bij het terugzoeken.*

Zoals reeds in de aanhef werd gezegd, zijn er heel enkele scholen, die van 1920 af reeds een tafel in vier decimalen gebruikten; voor 1937 had men vrijheid; ook thans nog.

De Heren Van Andel en De Bruyn verklaarden op de vergadering van 23 Oct. 1937 te Amsterdam, dat de leraren volledige vrijheid gelaten wordt tafels in vier of in vijf decimalen te gebruiken.

---

[1]) Zie P. Wijdenes Uitgave A van de Beknopte Driehoeksmeting.

PROBLEMEN VAN HET WISKUNDE-ONDERWIJS[1])

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

Het schoolbestaan, waarin voor velen van ons het dagelijksche beroepsleven verloopt, bevat in zijn rustige en zelfs in zijn onderbrekingen nog nauwkeurig vastgestelde regelmaat een sterk kalmeerend, men zou bijna kunnen zeggen verdoovend element. Het brengt zoowel voor de leerlingen als voor de docenten iederen dag weer zijn scherp omschreven plicht mee, waarvan het volbrengen een gevoel van weer-klaar-zijn en daardoor van rust en voldoening schept; het gaat telkens met zoo kleine stapjes vooruit, dat beide categorieën zich gemakkelijk tot een zekere zorgeloosheid aangaande de toekomst laten verleiden en ze beide wel eens geneigd zijn te vergeten, hoe groote belangen er in al die kleine dagelijksche gebeurtenissen toch voortdurend op het spel staan.

Een van de meest typeerende invloeden, die dit zoo gemakkelijk tot sleur voerend bestaan op den docent kan uitoefenen, is deze, dat hij er zoo gauw toe komt, de traditioneele organisatie van ons schoolwezen als een permanente realiteit te beschouwen en dat hij zoo spoedig blind wordt voor de vele nog onopgeloste problemen, die daarin overal schuilen. In het bijzonder laat men zich als docent in wiskunde zoo gemakkelijk de overheerschende positie aanleunen, die dit vak nu eenmaal op historische gronden verworven heeft en volgt men zoo graag de in den vollen zin van het woord saeculaire traditie, die het heeft weten te handhaven. Men vindt het vanzelf sprekend, dat de praestaties in de wiskundeles als een belangrijk kriterium voor de intellectueele begaafdheid van een leerling worden beschouwd en men voelt het menigmaal bijna als een sacrilegium, wanneer er pogingen worden gedaan, om aan het heilig huis van leerstof en methode te raken.

---

[1]) Voordracht gehouden op de Studie-conferentie over Paedagogische Problemen in het Middelbaar en Voorbereidend Hooger Onderwijs te Amersfoort, Internationale School voor Wijsbegeerte, 31 October—1 November 1936. De datum moge verklaren, dat de inhoud thans niet meer geheel actueel is.

Er kan in deze beroepsblindheid ongetwijfeld een sterke bron van kracht liggen. De onkritische enthousiast, die haar zijn eigen mag noemen, wordt er wellicht door in staat gesteld zijn werkkring met vuur en energie te vervullen. Leeraren zijn in het algemeen idealistisch aangelegd en sterk vatbaar voor illusies aangaande de waarde en het resultaat van hun werk en het komt voor, dat iemand tot zijn ambtelijk einde toe in de rotsvaste overtuiging leeft, dat hij, wiskunde doceerend, een zegen voor de schooljeugd is.

In ieder geval is iemand, die het problematisch karakter van het wiskunde-onderwijs niet ziet, uit een oogpunt van practische levenswijsheid gelukkiger te prijzen dan wie er al te veel oog voor heeft. Er zijn ook wiskunde-docenten, die hun geheelen werkkring voelen als een voortdurende mislukking, hetzij doordat ze er een onrecht aan de jeugd in zien, dat van haar op wiskundig gebied zooveel geeischt wordt, hetzij doordat ze op den duur de ontzaglijke discrepantie tusschen de aan weerszijden ten koste gelegde energie en de bereikte resultaten niet kunnen verdragen.

Tusschen de krachtgevende naieveteit van de eerste categorie en het ontmoedigend inzicht van de tweede ligt, zooals steeds, een gulden middenweg. Hij wordt bewandeld door hen, die met de volle en bewuste aanvaarding van de realiteit van ons onderwijssysteem in al haar consequenties een open oog voor de onvolkomenheden ervan kunnen vereenigen, die het traditioneele wiskunde-onderwijs vandaag vernietigend kunnen critiseeren en morgen datzelfde onderwijs met toewijding en nauwgezetheid kunnen geven, die alle skepsis aangaande het goed recht der wiskunde als overheerschend leervak persoonlijk hebben doorleefd en nu, aan de overzijde daarvan aangeland, blijmoedig en zonder illusies hun best doen, om alle positieve waarden, die ze op hun zwerftocht ontdekt hebben, in het onderwijs tot haar recht te doen komen.

Bij hen is de beroepsblindheid, waarover ik sprak, slechts schijn. Zij gaan mèt de naieve enthousiasten in het dagelijksche schoolbestaan aan de problemen van het wiskunde-onderwijs voorbij, omdat ze geleerd hebben, dat ze zoodoende meer bereiken dan de ontmoedigden in hun wijsheid, maar ze houden die problemen voortdurend in het oog en grijpen iedere gelegenheid aan, om in discussie met anderen, hetzij tegenstanders hetzij gelijkgestemden, hun inzicht te scherpen en de waarde van hun standpunt te toetsen.

Ik geloof niet mis te tasten, wanneer ik aanneem, dat in dezen

kring, die toch door zuivere belangstelling voor ons voortgezet onderwijs bijeen is gebracht, een gunstige gelegenheid bestaat, om in den geschetsten zin over de problematiek van ons wiskunde-onderwijs van gedachten te wisselen. Daarom durf ik uw aandacht vragen voor enkele hierin voorkomende kwesties, die mij altijd in het bijzonder hebben bezig gehouden.

Ik wil dan uitgaan van de vaststelling van enkele feiten, die, naar ik meen, op zoo algemeene ervaring steunen, dat men er nauwelijks meer meeningsverschil over kan verwachten, hoezeer dan ook de opvattingen over hun verklaring uiteenloopen. Het staat dan, dunkt me, wel vast, dat de overgroote meerderheid van onze jongens en meisjes, die voortgezet onderwijs wenschen te volgen, een zeer aanzienlijk deel van hun tijd en werkkracht moeten besteden, om eenigszins naar behooren de taak te kunnen vervullen, die het wiskunde-onderwijs hun oplegt; vervolgens, dat desondanks de resultaten van dit onderwijs ontstellend slecht zijn, zoo slecht, dat men in de meerderheid der gevallen eigenlijk heelemaal geen ernst kan maken met de eischen, die men op grond van het leerprogramma zou mogen en moeten stellen. Als minder vaststaand, mij althans door persoonlijke ervaring niet bevestigd, maar door ernstige beoordeelaars zoo vaak verzekerd, dat men het niet zonder meer kan verwerpen, moet daarnaast de bewering worden gesteld, dat deze gedwongen beoefening der wiskunde, afgezien van de begrijpelijke teleurstelling en ontmoediging, die het gevolg is van gemis aan succes, voor vele kinderen op zich zelf reeds een leed beduidt, dat voor hun geestelijken groei schadelijk kan zijn.

Naar aanleiding van deze feiten of vermoedens doet zich dadelijk het eerste en alles omvattende probleem van het wiskunde-onderwijs voor: welke zijn de motieven, die er toe kunnen drijven, aan de wiskunde in ons geheele schoolsysteem een zoo groote plaats toe te kennen; met welk recht wordt van het al of niet voldoen aan de eischen, die zij stelt, zoo menige beslissing over onze schooljeugd afhankelijk gemaakt? Het is allerminst een nieuwe of origineele kwestie, die ik hiermee aanroer; zij behoort integendeel tot de meest besprokene van ons geheele onderwijs; opgelost is ze echter nog lang niet en daar alle discussies over detailvragen van de didactiek der wiskunde toch altijd weer tot haar terugvoeren, kan ze hier zeker niet buiten beschouwing blijven.

We kunnen bij de behandeling van de kwestie beginnen met reeds dadelijk één categorie van leerlingen aan te wijzen, waarvoor ze niet bestaat, althans niet bestaan mag. Het zijn die leerlingen, die later een studie wenschen te volbrengen, waarin ook beoefening der wiskunde voorkomt of waarvoor een mathematische propaedeuse onmisbaar is. Voor a.s. studenten in wiskundige, natuurwetenschappelijke en technische vakken is een strenge mathematische training op H.B.S. of Gymnasium een simpele noodzakelijkheid en er zou zelfs niets op tegen zijn om, wat hen betreft, de eischen op wiskundig gebied hooger te stellen of strenger te handhaven dan tot dusver gebruikelijk is. Het is nu eenmaal een feit, dat in alle wetenschappen, die men gewoonlijk als β-vakken aanduidt, de wiskunde een steeds belangrijker rol gaat spelen en het valt ook niet te ontkennen, dat de volkomen technische beheersching van de steeds weer uit te voeren elementair-mathematische bewerkingen het best door gestadige oefening op jeugdigen leeftijd verkregen wordt.

Hiermee is natuurlijk niet gezegd, dat voor iederen leerling, die in zijn latere studie kennis der wiskunde noodig zal hebben, de beoefening daarvan op de Middelbare school steeds een genoegen zal zijn. Men kan alleen zeggen, dat hij er zich evenmin over mag beklagen als een aanstaand musicus iets op zijn vingeroefeningen en technische etudes tegen mag hebben. In den regel zal hij dat echter ook niet doen; de jongen, die zoo graag ingenieur wil worden, maar helaas geen wiskunde kan leeren, sterft zienderoogen uit, en hoewel er enkele extreme gevallen bekend zijn, waarin een aanvankelijk schijnbaar onvermogen in wiskundig werk omsloeg in volkomen vaardigheid, nadat maar eenmaal de ware belangstelling voor de toepassingen ontwaakt was, kan men in het algemeen wel zeggen, dat leerlingen van de bedoelde categorieën op school reeds hun best op de wiskunde zullen doen en er ook wel iets in zullen bereiken.

Ook sluit de aanvaarding van de noodzaak van grondig wiskunde-onderwijs voor a.s. beoefenaren der β-vakken natuurlijk niet in, dat men nu ook maar, wat hen betreft, de geheele thans overheerschende methodiek der wiskunde zonder critiek buiten discussie zou mogen stellen. Het tegendeel is waar: er is met het oog op de behoeften van hen, die later wiskunde zullen studeeren of wiskunde als hulpvak noodig zullen hebben, nog heel wat te verbeteren. Er

kan nog heel veel worden gedaan om te voorkomen, dat er een technische vaardigheid wordt aangekweekt, zonder dat de ontwikkeling van het inzicht daarmee gelijken tred houdt; er zal nog heel veel hervormd moeten worden, voordat de wiskunde als een volkomen redelijke, met hedendaagsche inzichten strookende werkzaamheid wordt beoefend en voordat het vermogen tot zelfstandig hanteeren der behandelde methoden tot een zoo hoog peil is opgevoerd als met het oog op verdere studie gewenscht is.

Maar dit zijn allemaal kwesties, die, hoe belangrijk ook, op een ander niveau liggen dan de problemen, die ik hier vanavond wil aanroeren; het zijn interne aangelegenheden der mathematische didactiek, die alleen in een kring van wiskundigen vruchtbaar behandeld kunnen worden. Het algemeene probleem van het bestaansrecht der wiskunde als leervak voor alle leerlingen van scholen voor voortgezet onderwijs raken zij niet.

Dat probleem vertoont zich pas in zijn vollen ernst, wanneer men aan al die leerlingen denkt, die buiten den betrekkelijk engen kring van a.s. studenten in de β-vakken staan, aan het ook nog betrekkelijk kleine aantal van de a.s. juristen, theologen, litteratoren en beoefenaren der handelswetenschappen en aan de veel grootere schare van hen, die zonder hoogere studie de practijk van het leven ingaan. Is wiskunde-onderwijs voor hen een goed of een kwaad ding; indien kwaad, is het een noodzakelijk of een overbodig euvel? Wordt het in stand gehouden door verstard conservatisme en ambtelijke impotentie of ligt er aan de traagheid, waarmee het zich handhaaft, een onpersoonlijke wijsheid ten grondslag, die dieper ziet dan emotioneele voor- en tegenstanders het elk individueel doen?

Ik behoef u niet uitvoerig te schetsen, met welke argumenten men over en weer reeds getracht heeft, deze kwesties tot oplossing te brengen, want natuurlijk kent u al de hierbij optredende discussies wel uit eigen ervaring. De voorstander van de wiskunde begint gewoonlijk met zich op de ontwikkeling van het logisch denken te beroepen, dat het gevolg van wiskunde-onderwijs zou moeten zijn, maar zijn tegenstander brengt hem dadelijk in het nauw door eerst een nauwkeurige analyse van dit begrip te eischen, vervolgens te betoogen, dat het uitvindingsvermogen, dat in de wiskunde zulk een belangrijke functie vervult, toch zeker niet volgens de wetten der logica werkt en ten slotte te betwijfelen, of een eventueele ont-

wikkeling van zekere verstandelijke vermogens in het wiskunde-onderwijs zich wel buiten de wiskunde bemerkbaar zal maken en bruikbaar zal toonen. De verdediger antwoordt hierop met de wedervraag, waarom de skepsis inzake overdracht, die, consequent toegepast, ons geheele stelsel van opvoeding en onderwijs schijnt te moeten aantasten, zich juist altijd speciaal tegen de wiskunde richt; hij acht het psychologisch experiment of de enquête voorals-nog incompetent om deze zaak te beslissen en hij blijft overtuigd, dat, wie in wiskunde goed kan redeneeren en vernuftig vraagstukken kan oplossen, in alle andere vakken, voorzoover ze op behoorlijk wetenschappelijk peil staan (en dat zijn er in zijn oog niet zoo heel veel) een goed figuur zal slaan en ook in de zaken van het practische leven met beleid en inzicht zal handelen. De bestrijder, de algemeen-wetenschappelijke competentie van den wiskundige in het midden latend, werpt tegen, dat de voorwaarde van goede prestaties in de mathesis toch in ieder geval niet noodig blijkt te zijn, om het in andere vakken ver te brengen en hij beroept zich op eclatante gevallen van groote geleerden, die als om strijd verklaard hebben, dat ze met wiskunde nooit overweg hebben gekund.

Dat argument maakt op den wiskundige niet den minsten indruk: ze hebben blijkbaar nooit goed onderwijs in wiskunde gehad (op den achtergrond van zijn geest leeft daarbij de gedachte aan onderwijs, zooals hij het zelf geeft) of ze zijn geremd geweest door vooringenomenheid. Het is toch ondenkbaar, dat iemand, die een goed verstand zegt te bezitten, de hoogst eenvoudige redeneeringen van de elementaire mathesis niet zou kunnen volgen, indien hij dat werkelijk wil. Alles zit immers volkomen logisch in elkaar; men behoeft zich slechts af te vragen, wat men weet, wat alle termen beduiden en waar men heen wil en dan gaat het vanzelf. Het antwoord hierop blijft niet uit: niet zonder hoon wordt gevraagd, of de wiskundige soms meent, dat denken en wiskundig denken synoniem zijn en de aanvaller wordt zelfs grof, wanneer hij het hopeloos vechten noemt tegen zulk een bekrompenheid; het is volgens hem niet eens juist, dat iets voor iedereen daarom reeds volkomen helder zou moeten zijn, omdat het logisch onberispelijk in elkaar zit, wie dat meent, betoogt hij, onderschat zoowel de hulp, die spontane belangstelling in het denkproces kan bieden als de remmingen, die instinctieve afkeer kan veroorzaken. Die afkeer kan echter bij emotioneele en aesthetisch aangelegde naturen gemakkelijk voorkomen;

de kille abstracties der mathesis, die hoogstens tot het verstand, maar niet tot het gemoed spreken, blijven in gebreke, de geestelijke resonantie op te wekken, die aan het begrip moet voorafgaan.

Als hij zoo iets hoort, geraakt de verdediger der wiskunde eerst recht in vuur. Hoe nu, roept hij uit, wilt gij dan aan de wiskunde het vermogen tot het wekken van emotie en aesthetische ontroering ontzeggen? Is zij niet de harmonie zelve, van oudsher met muziek ten nauwste verwant? Is er geen enge samenhang tusschen de kunstige verwikkelingen van een mathematisch bouwwerk en de, zoo ge wilt, niet slechts kille, maar zelfs ijskoude instrumentale muziek van Bach? Zijn niet de meeste wiskundigen muzikaal en heeft Leibniz het genoegen, dat de muziek verschaft, niet reeds teruggebracht tot de vreugde van een onbewust tellen?

De tegenstander, inziende, dat hij op gevaarlijk terrein komt, trekt zich nu terug door op te merken, dat de discussie nu toch wel heel ver is afgedwaald van de vraag, waarom alle kinderen op de Middelbare School wiskunde moeten leeren; spottend vraagt hij, of zij misschien ook al aesthetische ontroeringen ondergaan, als ze lijnstukken in een driehoek berekenen of een logarithmentafel hanteeren. Hierna werpt de wiskundige of zijn volgeling het over een anderen boeg door de stelling te poneeren, dat goed wiskunde-onderwijs vóór alles taal-onderwijs is, dat het de gewoonte aankweekt, om in goed gebouwde zinnen nauwkeurig te zeggen, wat men bedoelt, omdat ieder gebruik van een term, waarbij men zich niet nauwkeurig rekenschap geeft van de beteekenis, onmiddellijk tot foutieve resultaten of tot een stokken der redeneering leidt. Het is ons, zegt hij nu, er heelemaal niet om te doen, dat de leerlingen zooveel mogelijk stellingen kennen en zoo moeilijk mogelijke vraagstukken kunnen oplossen. Wij verlangen slechts een helder en exact woordgebruik en we beschouwen den inhoud der mathematische leerstof alleen maar als het materiaal, waaraan het vermogen, om zich goed uit te drukken, ontwikkeld wordt.

U weet natuurlijk allen heel goed, dat de discussie hiermee nog lang niet uit is. Er moet nog weer over getwist worden, of het bedoelde vermogen zich inderdaad laat ontwikkelen en zoo ja, of het dan ook op andere gebieden tot uiting komt: waarmee het geheele twistgesprek weer van voren af aan begint. Ook is Plato nog niet geciteerd (*μηδεὶς ἀγεωμέτρητος* .. en *ὁλκός ψυχῆς πρὸς ἀλήθειαν*); de onmisbaarheid der wiskundige scholing voor de beoefening van

de wijsbegeerte nog niet aan den eenen kant met klem betoogd, aan den anderen met overtuiging geloochend; er is nog niet over intellectueele eerlijkheid gesproken en over de moreele waarde daarvan. Maar ik wil de discussie niet verder vervolgen; het is onafzienbaar, hoeveel treffends en overtuigends nog aan weerskanten te berde zal worden gebracht, maar het staat natuurlijk al lang vast, dat de strijdende partijen onverzoend uiteen zullen gaan en van de toehoorders heeft zich reeds lang een stemming van diepe neerslachtigheid meester gemaakt.

Wat toch is het eenige, dat de beide strijdbare sprekers in hun woordenwisseling werkelijk afdoend hebben aangetoond? Dat is het bedroevende, maar helaas niet te loochenen feit, dat het in onzen tijd nog niet mogelijk is, òf de waarde van een leervak op wetenschappelijke wijze vast te stellen en daardoor uit te maken, of het moet worden gehandhaafd of verworpen òf met zooveel kracht van overtuiging en klem van redenen de onmisbaarheid ervan te bepleiten, dat de tegenstander zwicht en althans de mogelijkheid van zijn ongelijk erkent. Voor de wiskunde treedt dit verschijnsel in zeer uitgesproken vorm op, maar het is helaas van veel wijdere strekking; ieder, die aan onderwijsdiscussies pleegt deel te nemen, zal uit eigen ervaring kunnen bevestigen, dat als men in ons land een aantal ernstige menschen met ervaring van en belangstelling in het onderwijs bijeen brengt en hen om hun meening over een onderwijskundig vraagstuk vraagt, men altijd evenveel zinnen als hoofden vindt. Dit doemt ons onderwijs tot een toestand van onveranderlijkheid, die niet een gevolg is van afwezigheid van uitwendige krachten, maar van het volkomen evenwicht, waarin ze elkaar houden.

We zullen er ons, om weer tot de wiskunde terug te keeren, in moeten schikken, dat de waarde van dit vak evenmin als zijn ontbeerlijkheid of schadelijkheid op wetenschappelijk afdoende wijze kan worden aangetoond. Dat het wiskunde-onderwijs werkelijk allen lof verdient, die er altijd aan wordt toegezwaaid, kunnen we ten eerste niet deductief bewijzen, omdat alle daarbij optredende termen veel te vaag omschreven zijn en ten tweede niet, omdat de levende kinderen, die het ondergaan, nu eenmaal reageeren op een wijze, die zich in het geheel niet logisch laat afleiden. En we kunnen het niet inductief aantoonen, omdat het ervaringsmateriaal, waarover we beschikken, alleen betrekking heeft op een toestand,

waarin iedereen wiskunde leert en dus alleen de mate van welslagen daarvan kan doen kennen, maar niet op een onderwijssysteem, waarin bepaalde kinderen met en andere zonder wiskunde worden opgevoed.

Men kan zich echter nu eenmaal in practische aangelegenheden niet met een dergelijk non liquet tevreden stellen. En bij ontstentenis van een bewijs blijft geen andere mogelijkheid van die van een credo over. En zoo blijkt ten slotte een eigenlijk dispuut over de al of niet wenschelijkheid van wiskunde-onderwijs onmogelijk; er kan alleen gedachtenwisseling plaats hebben; de voorstanders kunnen zeggen, wat in hun oog de voordeelen ervan zijn; de tegenstanders kunnen wijzen op de gevaren, die zij zien en ieder kan slechts hopen, dat zijn opponens, die nu geen ergernis of geringschatting meer bij hem opwekt, zich zijn woorden ter harte zal nemen.

Het is in dezen zin, dat ik nader wil ingaan op de motieven, die er in mijn oog voor pleiten, de wiskunde als leervak voor alle scholen voor middelbaar en voorbereidend onderwijs te handhaven, om daarbij dan enkele opmerkingen te maken over de vraag, of die handhaving ook wijzigingen in leerstof en methode vereischt.

Wanneer ik daartoe nog eens de argumenten overzie, die we straks in de gefingeerde discussie hoorden aanvoeren en andere, die daarnaast nog zouden kunnen worden aangevoerd, dan ben ik persoonlijk geneigd, de meeste waarde te hechten aan den invloed ten goede, dien het wiskunde-onderwijs kan uitoefenen op een exact woordgebruik en een heldere uitdrukkingswijze en op het gevoel van verantwoordelijkheid voor uitgesproken beweringen. De wiskunde schept, dank zij den grooten eenvoud en het zeer beperkte aantal van haar fundamenteele begrippen, de mogelijkheid, om op ieder oogenblik van alle woorden, die men bezigt en van alle beweringen, die men uitspreekt, volkomen rekenschap te geven door de woorden tot woordafspraken en de beweringen tot axiomata te herleiden. Zij is het eenige vak, dat over deze mogelijkheid beschikt, omdat zij het eenige vak is, dat zich de weelde kan veroorloven, te abstraheeren van iedere complicatie, die haar zou kunnen verstoren.

Hoe noodzakelijk het is, dat iedere leerling van een Middelbare School, die dan toch door zijn aanwezigheid blijk geeft, een zekeren graad van geestelijke ontwikkeling na te streven (althans ouders

te hebben, die dit voor hem doen), een training op dit gebied doormaakt, blijkt wel het duidelijkst uit de verwondering, waarmee hij aanvankelijk reageert op de eischen, die hem gesteld worden. Het kind en evenzoo de onvoldoend geschoolde volwassene vinden de vraag: „wat zeg je eigenlijk?” op zich zelf vreemd, ja ongerijmd, waaruit vanzelf volgt, dat ze zich de vraag „wat zeg ik eigenlijk?” spontaan nooit zullen stellen. Zij missen de kritiek op het eigen spreken en a fortiori die op het eigen denken; ze leven in de overtuiging, dat het woord, de flatus vocis, met een begrip identiek is en dat dus met het uitspreken van het woord het begrip reeds mee gedacht is. Evenzoo verkeeren zij in den waan, dat iedere bewering een op zich zelf staand oordeel vormt, dat waar kan zijn of niet waar, dat in het eerste geval behoort te worden aanvaard en in het tweede moet worden verworpen, maar dat niet in samenhang met andere oordeelen gezien wordt. Het kind van de Lagere School zegt zijn onderwijzer met hetzelfde vertrouwen na, dat een getal deelbaar is door negen, wanneer de som der cijfers een negenvoud is, als waarmee hij van hem de mededeeling aanvaardt, dat Parijs de hoofdstad van Frankrijk is. En wanneer men hem naar aanleiding van de eerste uitspraak de vraag stelt: hoe weet je dat?, toont hij opnieuw verwondering, ja eenige gebelgdheid. Hij beschouwt zulk een vraag eenigszins als een aantasten van de autoriteit van zijn onderwijzer en mentaal antwoordt hij met de Pythagoraeërs: *Αὔτος ἔφα.*

Het is nu de taak van het wiskunde-onderwijs op de Middelbare School deze stemming van vertrouwen in de waarheid van het meegedeelde en in de afdoendheid van de uitdrukkingswijze te verstoren. Het is niet uitgesloten, dat het kind hierop met tegenzin en ergernis reageert, want in zekeren zin is deze stelselmatige opvoeding tot twijfel en kritiek ook een verdrijving uit het paradijs van het kind-zijn. Maar die gevoelens mogen niet als argument tegen de noodzakelijkheid van grondig wiskunde-onderwijs worden aangevoerd. Oefening, zoowel op geestelijk als op lichamelijk gebied, gaat nu eenmaal altijd met onlustgevoelens gepaard. Gymnastische oefeningen, waarbij men niet moe wordt en waarbij men zich geen ongewone inspanning behoeft te getroosten, kan men ook wel nalaten; muzikale etudes, die men zonder moeite a prima vista speelt, hebben geen nut.

Deze overweging wordt vaak misverstaan. Men stelt het boos-

aardig zoo voor, alsof de wiskundigen hun vak op dezen grond verdedigen, dat het ter staling van den wil voor jonge menschen zoo goed is gedwongen te worden om iets te doen, wat hun niet gemakkelijk afgaat. Dat is natuurlijk onjuist. De inspanning, die de wiskunde eischt, dient niet in de eerste plaats om den wil te stalen, maar ze is een middel tot een doel, waarvan niet is aan te nemen, dat een redelijk mensch het niet zou begeeren. Wie het eenmaal goed acht, dat iedereen zichzelf en anderen zooveel mogelijk rekenschap tracht te geven van de beteekenis van zijn uitspraken en van de gronden, waarop ze rusten, d.w.z. zichzelf en anderen zoo min mogelijk tracht te misleiden, kan geen bezwaren maken tegen de inspanning, die het den leerling kost, zich hierin te oefenen.

Maar zoo spoedig is de kritiek niet ontwapend. Zij beroept zich nu op den te jeugdigen leeftijd van de leerlingen, die men deze training in exact en verantwoord spreken wil doen ondergaan en wijst er op, dat juist het hoogst abstracte karakter der mathematische begrippen verhindert, dat ze voor het kind werkelijk gaan leven; ze wijst op de moeilijkheden, die de stijl van de gebruikte leerboeken aan het kinderlijk begrip in den weg legt en haalt als bewijsgrond daarvoor aan, dat het gewoonlijk vrijwel ondoenlijk blijkt, den leerling tot vruchtdragende zelfstandige bestudeering van een stuk uit het boek te brengen. En in al deze dingen heeft ze tot op zekere hoogte wel gelijk. Want het feit, dat een groot aantal leerlingen in de eerste klasse van de Middelbare School over de wiskunde struikelt, is onweerlegbaar en ook wie volhoudt, dat leerlingen, die dat doen, dan ook blijkbaar niet op de school thuis hooren, zal niet kunnen ontkennen, dat de school, die ze aanvaard heeft, daardoor toch ook een zekere verplichting op zich neemt, ze iets te leeren, wat binnen hun bevatting valt.

Ik wil er nu echter den nadruk op leggen, dat wanneer voor- en tegenstander van het wiskunde-onderwijs het op dit punt eens zijn geworden, de discussie reeds weer vergleden is naar een ander niveau dan waarop ze begonnen is. Want het gaat nu niet langer om de beiderzijds aanvaarde doelstelling van dat onderwijs, maar om de methode, die tot het bereiken van het gestelde doel wordt toegepast. De kwestie is hierdoor weer tot een interne aangelegenheid der mathematische didactiek geworden en daardoor ongeschikt om in een anderen kring dan dien van wiskundigen te worden behandeld.

De tegenstander ziet zich nu plotseling van zijn twistappel beroofd. Hij kan nu alleen nog maar opmerken, dat de wiskundigen het in de oplossing van hun interne problemen toch blijkbaar nog niet zoo heel ver hebben gebracht, dat intusschen de nooden van het wiskunde-onderwijs blijven bestaan en dat het slechts een schrale troost is te weten, dat het nagestreefde doel toch zoo schoon is.

En ook dit kan men hem weer tot op zekere hoogte toegeven. Maar men kan wel op allerlei verontschuldigingen wijzen. Waarvan een deze is, dat de mathesis zelf ook nog een woordje heeft mede te spreken. Het oude woord van Euclides, dat de wiskunde geen afzonderlijken weg kent voor koningen, is nog steeds van volle kracht en men kan het in onzen tijd onveranderd overnemen voor kinderen. Men kan natuurlijk de moeilijkheden van den steilen toegangsweg wat trachten te temperen en het ontbreekt ook heelemaal niet aan methoden, om dat te bereiken. Maar na een tijdje zal zich, ondanks intuitieve propaedeuse of empirische voorbereiding, het ware wezen der wiskunde wel altijd weer openbaren in al haar koude gestrengheid en men kan iets voelen voor de nietsverbloemende openhartigheid van den docent, die zijn leerlingen van den eersten dag maar dadelijk goed laat voelen, dat de weg van het M. O. een moeizame weg omhoog is.

Wat men echter niet goed kan praten, is, het adembenemende tempo, waarin die weg moet worden afgelegd. Want hier ligt voor mijn gevoel de voornaamste oorzaak van het geringe succes van ons wiskunde-onderwijs. Op het bestaansrecht ervan kan men niets afdingen, op de methode veel, op het tempo alles, terwijl wat er op de methode is aan te merken, in hoofdzaak daarom niet verbeterd kan worden, omdat het tempo het niet toestaat.

De grondfout is dus deze, dat de tijd te kort is, om de voorgeschreven leerstof met alle leerlingen grondig te behandelen of, zoo men wil, de leerstof te omvangrijk, om in den beschikbaren tijd door alle leerlingen te kunnen worden verwerkt. Wanneer men op een H.B.S. of Gymnasium les in wiskunde geeft, heeft men voortdurend aanleiding, de versregels van Richard Dehmel te citeeren: Und uns fehlt nur eine Kleinigkeit, Um so frei zu sein, wie die Vögel sind: Nur Zeit.

Men zou er zoo graag van afzien, om op het bord met zoogenaamde medewerking van de klas nieuwe stellingen te gaan bewijzen of vraagstukken voor te maken of dit door een leerling te

laten doen, terwijl de geheele overige klas in allerlei graden van activiteit of somnolentie al of niet meedenkt. Wiskunde leent zich zoo bij uitstek tot zelfstandige werkzaamheid der leerlingen, waarbij ieder zijn gang kan gaan volgens zijn eigen tempo, terwijl de docent steun verleent naar behoefte. Wie echter zoo te werk gaat, en zich daarbij toch telkens wil overtuigen, of met de ontwikkeling van inzicht en vaardigheid de groei van het vermogen tot scherpe formuleering wel gelijken tred houdt, komt bij onze gangbare schoolinrichting ongetwijfeld niet klaar met de voorgeschreven leerstof. Vroeg of laat neemt men dan toch zijn toevlucht tot de klassikale behandeling met het gevolg, dat men groot gevaar loopt, alweer tot nieuwe onderwerpen over te gaan, terwijl een groot deel van de leerlingen het vorige nog niet beheerscht en dus ook nooit beheerschen zal.

Nu is aan uitbreiding van den voor de wiskunde beschikbaren tijd natuurlijk niet te denken; het zou zelfs niet wenschelijk zijn, indien het mogelijk ware. De voor de hand liggende conclusie schijnt dus hierin te bestaan dat de leerstof op rigoureuze wijze moet worden besnoeid; maar — en hier blijkt nu weer de complicatie, die aan ieder onderwijsprobleem eigen schijnt te zijn — daarin schuilt weer een ander gevaar. De beschikbare tijd is alleen dan te kort, wanneer men de wiskunde zoo behandelen wil, dat de leerling uit kracht van eigen werkzaamheid en onder den invloed van een voortdurende controle van de zijde van den docent, een werkelijk redelijk gefundeerde en in correcten vorm tot uiting gebracht inzicht in de wiskunde verwerft; niet, wanneer men zich tevreden stelt met het aankweeken van een zekere technische, in den grond niet begrepen vaardigheid. Een verregaande besnoeiing van de leerstof heeft dus slechts waarde, wanneer ze met de toepassing van die behandelingswijze gepaard gaat, die men als de epistemische tegenover de bloot-technische stellen kan. Er bestaat echter in de tegenwoordige omstandigheden nog geen waarborg, dat de epistemische wijze van wiskunde te doceeren door vele docenten inderdaad niet alleen met den mond gewild wordt.

. . . .

Ik wil mij nu eens even voorstellen, dat al de tot dusver besproken kwesties tot een zekere oplossing waren gebracht, dat men het er over eens was, dat een ten opzichte van den tegenwoordigen

toestand beperkte hoeveelheid wiskunde, op grondige wijze behandeld en in alle kalmte verwerkt, voor alle leerlingen van scholen voor middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs tot de wenschelijkheden behoort en dat er onder de docenten in wiskunde een voldoende mate van eenstemmigheid was bereikt over de beteekenis van die grondigheid en die kalmte en over de toelaatbare eischen, aan den leerling te stellen. Dan zou er echter nog een belangrijk punt van mogelijk meeningsverschil overblijven. De sterke beperking der leerstof in de eerste jaren zou het nl. noodzakelijk maken, dat van een zeker oogenblik af de leerlingen, die later in B-richting verder willen studeeren, een afzonderlijk, strengere eischen stellend en in sneller tempo voortgaand wiskunde-onderwijs zouden moeten gaan genieten. Reeds hierom zou de thans reeds bestaande splitsing in een A- en een B-richting behouden moeten blijven, ja wellicht zelfs vervroegd moeten worden. Dan zou echter in nog scherperen vorm, dan ze nu reeds bezit, de kwestie rijzen, wat er gebeuren moet met de verdere verzorging van de mathematische ontwikkeling van de leerlingen der A-richtingen.

Die kwestie bestaat, zooals u weet, reeds nu en om mij niet te veel in hypothetische omstandigheden te verdiepen, wil ik haar behandelen, zooals ze zich op dit oogenblik het meest opvallend voordoet, nl. in den vorm, of het wiskunde-onderwijs op het α-Gymnasium al dan niet moet worden gehandhaafd en, indien wel, of het al dan niet hervorming noodig heeft. Het zal u bekend zijn, dat deze aangelegenheid, die reeds lang de aandacht trekt, in de afgeloopen weken vooral druk is besproken naar aanleiding van een rede, die de aftredende rector-magnificus van de Leidsche Universiteit, Prof. Mr. A. S. de Blécourt, bij de overdracht van het rectoraat heeft gehouden en waarin hij heeft aangedrongen op totale afschaffing van de wiskunde op het Gymnasium-α, daar deze, naar hij zeide, toch tot niets anders dan tot verdriet en getob aanleiding geeft, ja zelfs oorzaak schijnt te zijn, dat studenten met α-diploma niet meer behoorlijk Latijn kunnen lezen. Deze uitval van den Leidschen rector, die begeleid werd door opmerkingen, die nu niet bepaald van groote deskundigheid inzake de ontwikkeling van het Gymnasiale onderwijs getuigden, is een gemakkelijke prooi geworden van de kritiek, die er van gymnasiaal-mathematische zijde op is uitgeoefend. Daardoor is echter haar uitwerking niet te niet gedaan en daar de Leidsche Rector bovendien niet meer heeft gedaan dan

een wensch uit te spreken, die door niet weinigen, waaronder ook wiskundigen, wordt gedeeld, blijft het meer dan ooit geraden, zich rekenschap te geven van het voor en tegen van de aangeroerde kwestie.

Wanneer ik dat hier tracht te doen met al het voorbehoud, dat iemand past, die het Gymnasium noch als leerling, noch als docent ooit uit ervaring leerde kennen, dan kan ik niet ontkennen, dat ik me tot op zekere hoogte kan indenken in de overwegingen van hen, die afschaffing van de α-wiskunde bepleiten. Ik kan me levendig voorstellen, dat met uitzondering van dat toch altijd zeer beperkte aantal leerlingen, die alle vakken werkelijk goed beheerschen, die dus eigenlijk op een ongesplitst Gymnasium zouden thuis behooren, en waarvoor het alleen een gevolg van de toevallige beroepskeuze is, dat ze op de α-afdeeling zitten, op deze afdeeling het contrast tusschen de op het gebied der wiskunde gestelde eischen en de bereikte resultaten zoo opvallend is, dat men zich af gaat vragen, of de tijd en de moeite, die er aan ten koste wordt gelegd, niet beter zouden kunnen worden besteed, temeer, omdat de bedoelde leerlingen toch ook al vier jaren lang wiskunde-onderwijs hebben genoten en dus de daaraan verbonden zegeningen reeds ruimschoots deelachtig zijn geworden. Wanneer men nu echter aan deze overweging onmiddellijk de conclusie vastknoopt, dat de wiskunde dus van het α-Gymnasium moet verdwijnen, dan gaat men, naar ik meen, te ver. Men neemt dan nl. zonder nader onderzoek aan, dat de α-wiskunde niet anders gedoceerd kan worden dan nu het geval is. Dat is echter een onderstelling, waarvan de juistheid, op zijn minst genomen, aan twijfel onderhevig is, en die dus in ieder geval eerst nader zal moeten worden onderzocht.

Zij berust nl. op de overtuiging, dat het resultaat van wiskunde-onderwijs noodzakelijk moet bestaan in een vermogen tot oplossen van vraagstukken en dat dus èn het voor school te maken werk èn het werk voor het eindexamen voornamelijk in vraagstukken moet bestaan. Die overtuiging nu lijkt mij ongegrond; de traditie schijnt haar weliswaar voor onaantastbaar te verklaren, maar men moet daarvan, dunkt mij, in deze zaak niet al te zeer onder den indruk komen. In ieder geval is er zeer goed een vorm van wiskunde-onderwijs denkbaar, waarbij de meest wezenlijke voordeelen, die het vak kan opleveren voor leerlingen, die het bij hun latere studie

niet noodig hebben, worden bereikt, zonder dat een beroep wordt gedaan op het spontane uitvindingsvermogen, dat tot het gemakkelijk oplossen van vraagstukken in staat stelt of op de alleen door langdurige oefening te verkrijgen routine, die het gemis van dat vermogen tot op zekere hoogte kan vergoeden. Welke die meest wezenlijke voordeelen zijn: gestadige oefening in zuiver spreken en het zich en anderen rekenschap geven van den logischen samenhang van de gedane beweringen, heb ik reeds enkele malen gezegd. Voor α-leerlingen zou daar nog bij kunnen komen de bestudeering van de structuur van de mathematische redeneering, dus om te beginnen een grondige behandeling van de begrippen axioma, constructiepostulaat, definitie, van de relatie van een stelling tot haar omgekeerden en logische omkeeringen, van de mogelijkheid, de eerste relatie in verband te brengen met het onderscheid tusschen noodige en voldoende voorwaarden, van de indirecte bewijsmethode, van de tegenstelling tusschen analytisch en synthetisch redeneeren. Van hieruit openen zich dan verschillende wegen: men zou kunnen denken aan een behandeling van de beginselen der logica, waarbij de wiskundige redeneeringen als verduidelijking zouden kunnen dienen; men zou ook het onderscheid tusschen mathematisch en natuurwetenschappelijk denken nader kunnen beschouwen, de tegenstelling tusschen inductie en deductie kunnen verhelderen, de verwantschap tusschen inductie en mathematische analyse kunnen bespreken, de rol van de deductie in het inductieve denken en de mogelijkheid van axiomatiseering van een natuurwetenschap, toe te lichten aan het voorbeeld van de rationeele mechanica.

Een verdere mogelijkheid van leerstof, die verhelderend en ontwikkelend zou kunnen werken zonder dat andere eischen zouden behoeven te worden gesteld dan die van een verstandige reproductie, biedt zich aan, wanneer men de in de lagere klassen gevolgde methode, die op verscherping van woordgebruik gericht was, ook hier consequent toepast. Ik denk hierbij aan bespreking van begrippen als irrationaliteit, limiet, raaklijn, oneindig, continuiteit.

Vervolgens bestaat de mogelijkheid van behandeling van grepen uit de geschiedenis van de wiskunde en de natuurwetenschappen, eventueel gebaseerd op lectuur van klassieke schrijvers in het oorspronkelijke. Men zou b.v. de ontwikkeling van het getalbegrip, van teltaal en cijferschrift en van de rekenmethoden bij de verschillende cultuurvolken der oudheid kunnen behandelen; den groei

van het begrip vergelijking en van de oplossingsmethoden daarvan, het ontstaan der algebra, de niet met passer en lineaal oplosbare klassieke problemen der geometrie, de geschiedenis van de astronomie van ons zonnestelsel en van de mechanica van Newton.

Van hieruit blijkt zelfs de mogelijkheid van een directe bijdrage van het wiskunde-onderwijs tot het allereerste doel van het Gymnasium: de kennismaking met de klassieke cultuur. Het is nl. een dwaling te meenen, dat men die kennismaking volledig tot stand zou kunnen brengen door alleen de Grieksche taal, de politieke geschiedenis, de litteratuur en hoogstens nog de beeldende kunst binnen den gezichtskring van den gymnasiast te brengen. Wiskunde en astronomie hebben in het Grieksche geestesleven steeds een overheerschende rol gespeeld. Voor de ware vertrouwdheid met het Grieksche denken vormen zij nog steeds als in Plato's tijd een noodige voorbereiding. Door lectuur van een Griekschen wiskundige in het oorspronkelijke zou de eenheid van leerplan en de samenhang tusschen de verschillende vakken, waarnaar men tegenwoordig zoo verlangt, op de schoonst denkbare wijze kunnen worden bevorderd.

Ik zou wel eens willen weten, of Prof. de Blécourt aan de mogelijkheid van zulk een wiskunde-onderwijs gedacht heeft, toen hij het bij uitnemendheid klassieke denkvak mathesis van het voor alles op klassieke opvoeding gerichte α-gymnasium, waar het van oudsher thuishoort, wilde verbannen. Ik vermoed van niet. Want in dit wiskunde-onderwijs zouden logische waarden worden geboden, die voor een a.s. jurist van groote beteekenis zijn, algemeene inzichten in de vermogens van het menschelijk denken worden ontwikkeld en cultuurhistorische perspectieven worden geopend, die geen a.s. beoefenaar van eenige wetenschap en zeker niet van een wetenschap in de α-faculteiten onverschillig kunnen laten.

Maar helaas, de gemiddelde niet-wiskundige kent deze zijde der mathesis niet. Hij ziet haar niet in haar historische functie en niet in haar grandiose moderne ontplooiing, waarin zij tot een van de meest verwonderlijke voortbrengselen van den menschelijken geest is uitgegroeid; hij ziet haar slechts als een aaneenschakeling van vraagstukken en nog eens vraagstukken en hij meent, dat daarin haar geheele wezen bestaat.

Laten we echter terugkeeren tot de nuchtere realiteit, door de

vraag te stellen: is een wiskunde-onderwijs aan een α-Gymnasium zooals ik dat in enkele groote lijnen heb trachten te schetsen, practisch mogelijk? Ik zou daarop willen antwoorden: van den kant der leerlingen ongetwijfeld. Men zal bij α-leerlingen, die iets van den waren geest van het humanisme in zich hebben, zeer zeker meer belangstelling kunnen verwachten voor een historisch-philosophische behandeling van een voor de ontwikkeling van het menschelijk denken belangrijke wetenschap dan voor vraagstukken, die, naar ze maar al te goed voelen, toch eigenlijk in hoofdzaak worden gesteld tot oefening van een theorie, die maar al te vaak alleen daarom wordt ontwikkeld, omdat men er bepaalde vraagstukken mee kan oplossen.

Maar van den kant der leeraren? Hier ligt de zaak minder eenvoudig. Niet wat betreft enkele van de voorgestelde onderwijsmiddelen, die een toevallige individueele liefhebberij van de zijde van den docent vooronderstellen en waarvan men de toepassing dus ook nooit van iedereen, die onderwijsbevoegdheid bezit, zal kunnen verlangen. Dit zijn de lectuur van klassieke wiskundige schrijvers in het oorspronkelijke en de samenwerking met de classici in de verzorging van de klassieke opvoeding. Dat ik deze niettemin genoemd heb, is niet toe te schrijven aan een neiging om in utopieën te zwelgen. Het vermogen om de wiskunde op deze wijze te behandelen, komt immers individueel wel voor en in zulk een geval behoorde een docent aan een α-Gymnasium eigenlijk de vrijheid te hebben, er in zijn onderwijs ook gebruik van te maken.

Er treden echter moeilijkheden op, waar het de andere genoemde onderwerpen betreft, die immers bij een eventueele reorganisatie van het wiskunde-onderwijs op het α-Gymnasium door het programma zouden moeten worden voorgeschreven. Gesteld namelijk eens, dat de wenschelijkheid van een meer humanistisch wiskunde-onderwijs algemeen werd erkend en dat dit op grond daarvan werd ingevoerd, dan zou de gemiddelde afgestudeerde in wiskunde zulk een onderwijs op grond van zijn universitaire studie niet kunnen geven, maar men zou zich moeten verlaten op zijn eigen studiezin en verantwoordelijkheidsgevoel. Diezelfde opmerking kan men telkens weer maken, wanneer het gaat om de wenschelijkheid van het bezit van een zekere kennis of de principieele aanvaarding van zekere algemeene denkbeelden van de zijde der leeraren. Er kan nooit eenige waarborg zijn voor een zekere eenstemmigheid in het

nastreven van bepaalde hervormingen, zoolang het aan het persoonlijk initiatief van de beginnende docenten wordt overgelaten, in hoeverre zij zich met de verschillende opvattingen over de didactiek van hun vak vertrouwd willen maken, dus zoolang de universiteiten of de andere instellingen, die onderwijsbevoegdheid verleenen, zich onthouden van een bewuste voorbereiding op het leeraarsambt.

Tot dusver doen ze dat, wat wiskunde betreft, nog vrijwel algemeen. Ze staan nog altijd op het benijdenswaardig optimistische standpunt, dat ieder, die een zekere kennis van bepaalde onderdeelen der wiskunde heeft verworven, eo ipso in staat is, alle wiskunde-onderwijs, dat van hem verlangd wordt, op de juiste wijze te geven. Het is zelfs voorgekomen, dat een hoogleeraar in wiskunde alle opzettelijke voorbereiding tot het les geven overbodig noemde, omdat dit een zoo eenvoudig en vanzelfsprekend werk is, dat men de onbevangenheid van een jong docent slechts zou schaden door hem in den waan te brengen, dat men er zich ook gedachten over kan maken. In blijkbare overeenstemming met deze opvatting volstaan dus de Universiteiten, de Technische Hoogescholen en de instituten ter opleiding voor een middelbare acte met het aanbrengen van een zekere wetenschappelijke vorming; aan het eind komt dan als een soort van premie een onderwijsbevoegdheid uit de lucht vallen. Het wonderlijke gevolg is, dat men in ons land langs den weg van het hooger onderwijs wel voor dokter of predikant kan studeeren, maar niet voor leeraar. Men studeert in dat geval voor iets wat men niet worden zal, nl. voor wiskundig onderzoeker of voor ingenieur en men wordt iets waarop men zich niet heeft voorbereid. Ik zal op deze moeilijke kwestie niet ingaan, maar ik heb haar toch niet heelemaal onaangeroerd kunnen laten, omdat zij alleen de verklaring geeft van het feit, dat hervormingen in de methodiek van ons wiskunde-onderwijs zelfs dan nog niet te verwezenlijken zouden zijn, indien zij onder docenten met ervaring algemeen gewenscht werden.

Wanneer ik nu hiermee mijn uiteenzetting besluit, dan doe ik dat niet in den waan, dat ik alle brandende problemen van ons wiskunde-onderwijs heb behandeld of zelfs maar vermeld. Wat ik er wel van gezegd heb, zal echter, naar ik meen, toereikend zijn, om zelfs iemand, die het problematisch karakter, dat aan dat onderwijs eigen is, nog nooit mocht hebben opgemerkt, te overtuigen, dat er

nog heel wat te hervormen zal zijn, voordat we op dit gebied gezonde toestanden hebben bereikt. Tot het voorbereiden en eventueel uitvoeren van die hervormingen bestaat onder de Nederlandsche docenten in wiskunde bereidwilligheid genoeg, omdat het inzicht in de noodzakelijkheid ervan wel in breede kringen aanwezig is. Men moet hun echter niet, zoodra men fouten of misstanden in de wiskunde opmerkt, nu maar dadelijk aankomen met het botte voorstel, om het heele vak af te schaffen. Want nog steeds leeft bij de overgroote meerderheid van hen de overtuiging, dat men zoo doende onherstelbare schade zou toebrengen aan ons geheele onderwijs. Ik heb in het begin van mijn voordracht eenigszins railleerend gesproken over leeraren in wiskunde, die overtuigd zijn, dat ze een zegen zijn voor de schooljeugd. Maar in die opmerking ontbrak toch ook de ernst niet. Ik ben inderdaad overtuigd, dat goed wiskunde-onderwijs, op de middelbare school genoten, een zegen voor iemands geestelijke ontwikkeling beduidt. Want goed wiskunde-onderwijs kan den jongen mensch zekere normen van intellectueele helderheid en eerlijkheid bijbrengen, waarnaar hij zich in de oneindige verwikkelingen, waarin de studie van andere wetenschappen en de ervaringen van het leven hem zullen brengen, wel nooit ten volle zal kunnen gedragen, maar die hun uitwerking niet zullen missen, wanneer ze hem als ideaal blijven voorzweven.

KORRELS.

XIX. HET ORTHOCENTRISCHE VIERVLAK.

In het nieuwe leerboek van Molenbroek—Wijdenes: stereometrie. (4e druk) wordt deze stof behandeld pag. 48.

De volgorde van behandeling is als volgt:

a) Twee hoogtelijnen van een viervlak kruisen elkaar in het algemeen.

b) Als in viervlak ABCD de ribben AD en BC elkaar loodrecht kruisen, zullen de hoogtelijnen uit A en D en ook uit B en C elkaar snijden.

c) Omgekeerd als de hoogtelijnen uit A en D elkaar snijden, kruisen de ribben AD en BC elkaar loodrecht.

d) Als twee ribben elkaar loodrecht kruisen, liggen de snijpunten van de paren hoogtelijnen uit de eindpunten op de rechte, die de kruisende ribben loodrecht snijdt.

De auteur neemt het geval AD loodrecht BC. Dan snijden de hoogtelijnen uit A en D elkaar in H en die uit B en C elkaar in G.

e) In welk geval zal G met H samen vallen? Antw.: Als AB en CD elkaar loodrecht kruisen.

Eindconclusie: De vier hoogtelijnen gaan dan door één punt.

Crisis: a) Ik vind deze conclusie niet bewezen. Wel is bewezen: *als* de vier hoogtelijnen door één punt gaan zal (behalve AD loodrecht BC) AB loodrecht staan op CD. Niet andersom.

b) Waar verder in ons meetkundeonderwijs van de begrippen nodig en voldoende nog zo weinig gebruik wordt gemaakt, welke begrippen nochtans voor de denkkracht een grote vormende waarde bezitten, waar hier zich een ongezochte gelegenheid voor doet met deze begrippen verhelderend te werken, mag ik misschien wel aangeven hoe ik deze stof behandel. (geinspireerd hiertoe door de behandeling van Wijdenes—Molenbroek).

1) Wanneer zullen 2 hoogtelijnen in een viervlak elkaar snijden?

We vinden: als de hoogtelijnen uit B en D elkaar snijden, dan *moet* AC loodrecht staan op BD. Is *nodige* voorwaarde.

Is deze voorwaarde ook *voldoende?* Antwoord: Affirmative.

2) Als AC loodrecht is op BD snijden de hoogtelijnen uit A en C ook elkaar.

3) Wanneer zullen deze twee snijpunten samenvallen?

a) We bewijzen eerst: als ze samenvallen, dan is AB loodrecht CD. Dit is dus een *nodige* voorwaarde.

b) Is dit nu ook voldoende? Antwoord: Affirmative. (dit onderdeel wordt volgens mijn inzien door Wijdenes overgeslagen).

Om 3*b* te kunnen bewijzen is het echter naar ik meen, noodzakelijk dat men eerst bewijst, dat zo AB loodrecht is op CD en AC loodrecht BD, ook het derde paar kruisende ribben loodrecht op elkaar staat. Men kan deze stelling bewijzen met behulp van de betrekkingen $(a')^2 - (c')^2 = c^2 - a^2$, ofwel met het omgeschreven parallelepipedum, ofwel op de manier van Euclides XII pag. 175. — Dit punt wordt begrijpelijk niet in Wijdenes behandeld.

We gaan dus uit van het orthocentrische viervlak en vinden als nodige en voldoende voorwaarde dat het orthogonaal moet zijn.

Nota: Het punt *d* uit de behandeling volgens Wijdenes valt dus buiten deze bewijsvoering. A. ADRIAANSE.

XX. EEN EENVOUDIG BEWIJS VAN DE STELLING VAN PYTHAGORAS.

CD is de hoogtelijn op de schuine zijde AB van een rechthoekige driehoek.

BD + DA = BA of $a \cos B + b \cos A = c$; hierin is $\cos B = \frac{a}{c}$ en $\cos A = \frac{b}{c}$; dus $a \cdot \frac{a}{c} + b \cdot \frac{b}{c} = c$ of $a^2 + b^2 = c^2$.

Gent. J. NIJS.

BOEKBESPREKINGEN.

P. Wijdenes. Decimale tafels. Overdruk uit *Euclides*. 13e jg. (1937), No. 5, 25 blz.

P. Wijdenes, Five Place Tables. Decimal System. 168 blz., 16 × 24 cm, Noordhoff, Groningen. 1937. Prijs geb. *f* 2.50.

Het artikel *Decimale tafels* kan als inleiding tot *Five Place Tables* beschouwd worden. Na een belangwekkend historisch overzicht van de decimale (= centesimale) tafels, waarin S. titelbladen en inleidingen reproduceert van de tafels van Callet, Borda, Hobert und Ideler, geeft hij een rechtvaardiging voor de uitgave van zijn *Five Place Tables*. S. licht zijn lezers in over het feit, dat zij die dagelijks in de trigonometrie werken (hij denkt vooral aan landmeters), bijna uitsluitend de decimale verdeeling gebruiken en bepleit invoering van deze verdeeling bij het onderwijs, opdat dit dichter bij de praktijk zal komen te staan. Als een voorname oorzaak, dat dit al niet veel eerder is geschied, ziet S. het ontbreken van goedkoope tafels. Als men weet, dat *Five Place Tables* bevat de logarithmen van de gewone getallen, de logarithmen van sin, cos, tg en cotg, de natuurlijke waarden van sin, cos, tg en cotg en de noodige bijtafels, dus *alles* wat de scholier behoeft, en bovendien, dat de eenvoudige tafel van Balzer und Dettwiler voor bijna denzelfden prijs alleen de natuurlijke waarden geeft zonder eenige voorziening voor de cotangenten van de zeer kleine hoeken, dan moet met erkentelijkheid jegens uitgever en samensteller toegegeven worden, dat bovengenoemde oorzaak volkomen is terzijdegesteld.

Uit het artikel leeren we het als een inconsequentie inzien, dat we in het decimale systeem nog steeds spreken van centesimale minuten en seconden. S. gebruikt, m.i. terecht: decigraad (dgr), centigraad (cgr), milligraad (mgr) en decimilligraad (dmgr), dus $1^c = 1$ cgr en $1^{cc} = 1$ dmgr. In plaats van $6^g15^c67^{cc}$ schrijft hij veel practischer: 6,1567 gr.

Onderwerpen we nu de tafel eens aan een nadere beschouwing.

I. *Gewone logarithmen* in 5 decimalen en constanten. Als gewoonlijk.

II. *Omzettingen* van nieuwe naar oude graden en omgekeerd, van nieuwe graden naar radialen en omgekeerd en van oude graden naar radialen.

III. *Logarithmen in 5 decimalen van sin, cos, tg en cotg.* De hoeken klimmen van 0 gr tot 0,150 gr op met 0,001 gr. Om in dit gedeelte de logarithmen in 5 decimalen te bepalen, geeft S. de formule log sin $\alpha =$ log tg $\alpha =$ log s $+ \overline{6},19612$, als $\alpha = $ s dmgr. Omgekeerd: log s $=$ log sin α (of tg α) $+ 5,80388$. De stagneerende S- en T-tafels zijn dus beperkt tot één S (= T)-waarde! Zelfs hiervoor lijkt S. zich nog te willen excuseeren door in zijn artikel te

schrijven: „Hoeken tot 15 cgr en tusschen 99,85 gr en 100 gr komen weinig voor....". Is dit niet een onjuistheid? Heeft bv. een azimuth in de Rijksdriehoeksmeting van 0,0017 gr een geringere kans voor te komen dan een van 17 gr? Zouden hoeken in die gebieden door geringe in de natuur voorkomende afwijkingen van de fundamenteele hoeken 0 gr en 100 gr, juist niet méér voorkomen dan andere? Heeft S. echter slechts het schoolgebruik op het oog, dan heeft hij gelijk.

Van 0,15 gr af is het reeds mogelijk, evenredig te interpoleeren. Daartoe was het noodig tot 1,20 gr nog met 0,001 gr op te klimmen. Daarna geeft de tafel de centigraden en kan men een vollen graad op een bladzijde houden.

Negatieve waarden worden volgens het Fransche systeem aangeduid: $\overline{2}$,42163 (= 0,42163 — 2 = 8,42163 — 10), inderdaad een zeer practische, volledige en weinig plaats innemende notatie.

IV. *Natuurlijke waarden van sin, cos, tg en cotg,* met opklimming per centigraad. Wegens de vaste plaats, die de rekenmachine in onze berekeningen heeft ingenomen en logarithmische tafels daardoor nauwelijks meer gebruikt worden, stel ik het meest in deze tafel belang. Zij gaat helaas mank aan de misvatting, die in onderwijskringen schijnt te heerschen, dat zoo'n tafel voor alle functies van 0 gr tot 100 gr steeds 5 decimalen moet geven. Is tg α gegeven met een afrondingsfout d, dan heeft cotg α, berekend uit $\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$, een fout $\frac{d}{\text{tg}^2\,\alpha}$. Deze cotg bepaalt den hoek even nauwkeurig als de gegeven tg. Is bv. tg $\alpha = 0{,}00801$ en dus d maximaal $= 5 \times 10^{-6}$, dan is de fout in cotg α gelijk aan $5 \times 10^{-6} \times 10^{6} : 64 = 0{,}08$. De tafel van Balzer en Dettwiler geeft voor den cotg van denzelfden hoek op: 124,82 en had dus kunnen volstaan met 124,8 om den hoek met ongeveer dezelfde nauwkeurigheid als de tg te bepalen. Als echter Wijdenes voor dezen cotg geeft: 124,82474, dan is dit disharmonie. Het gevolg is, dat Wijdenes zeer veel en zeer groote differenties krijgt, die zelfs op een negental aparte bladzijden achterin geplaatst moesten worden; Balzer und Dettwiler konden ze daarentegen houden op de bladzijde, waar ze behooren.

Des te grooter de differentie is, des te nauwkeuriger kan men interpoleeren, mits het verloop van de functie als lineair is te benaderen, wat te zien is aan de naastliggende differenties, die dan nauwelijks mogen verschillen van de gegeven differentie. Voor een gelijkmatige nauwkeurigheid over de geheele tafel, is het gewenscht, dat de differenties niet te veel uiteen loopen. Wijdenes heeft differentietafels van 0 tot 1303! M.i. zijn de differenties boven 100 (ontstaan door het teveel aan decimalen) te groot, die beneden 10 te klein, omdat men van de vijfdecimalige tafel mag verlangen, dat men de mgr nauwkeurig kan bepalen ongeacht de grootte van den hoek. Ik zou de differenties willen houden tusschen 10 en 100 en daartoe den tg van 0 gr tot 74 gr met 5 dec. geven, van 74 gr tot 92 gr met 4 dec., van 92 gr tot 97,5 gr met 3 dec., van 97,5 tot 99,2 gr met 2 dec., van 99,2 tot 99,75 gr met 1 dec. Hierboven is lineaire interpolatie binnen den centigraad niet meer mogelijk en dus een andere voorziening gewenscht, bv. opklimming per dgr, resp. dmgr.

Door met alle geweld 5 decimalen te willen geven, is de interpolatie bij den tg boven 93 gr. geheel onmogelijk geworden. Om tusschengelegen tangenten toch te kunnen bepalen (ook weer met 5 decimalen) is aan den voet van de pagina de formule cotg $a^{cc} = \frac{p}{a} - q \times a$ geplaatst met de gegevens p = 636619,77237; log p = 5,80388; q = 0,0000005236; log q = $\overline{7}$,71900. Die logarithmen in de tafel van de natuurlijke waarden voel ik als een anachronisme. Een paar bladzijden verder luidt de formule: cotg $a^{cc} = \frac{p}{a} - q \times a - r \times a^3$!! Heel aardig(?) voor schooljongens, maar voor de praktijk?

De reden, waarom in een logarithmische tafel sec en cosec weggelaten kunnen worden, geldt niet voor de tafel van de natuurlijke waarden. Voor de school is dit niet van belang, maar in de praktijk van het machinerekenen moet men de volle vrijheid hebben om $\frac{a}{\sin\alpha \sin\beta}$ om te zetten in $\frac{a \operatorname{cosec}\alpha}{\sin\beta}$ (d.w.z. in plaats van den sin den cosec op te zoeken), teneinde de bewerking zonder onderbreking op de machine te kunnen uitvoeren.

Vergelijk ik nog twee andere tafels met die van Wijdenes, dan blijkt, dat *Gauss* in zijn vijfdecimalige tafel voor de natuurlijke waarden in oude verdeeling, den tg op de door mij gewenschte wijze behandelt. Hij schrijft daarover: „In der vorliegenden Tafelsammlung sind die natürlichen Zahlen der goniometrischen Funktionen in der Hauptsache in fünfstelligen Dezimalbrüchen gegeben. Nur die Cotangenten der Winkel von 8° bis 19° waren des bequemen Gebrauchs der Tafel halber auf eine geringere Stellenzahl abzukürzen, *jedoch ohne den für den Zweck der Tafel erforderlichen Genauigkeitsgrad zu beeinträchtigen*" (cursiveering van mij). De tafel van Steinbrenner voor de vijfdecimalige natuurlijke waarden in nieuwe verdeeling, geeft den tg niet steeds in 5 decimalen, maar in 5 geldende cijfers en wel van 97 gr tot 99,85 gr met opklimming per mgr en van 99,85 gr tot 100 gr met opklimming per dmgr. De tafels van Gauss en Steinbrenner geven niet de waarden van sec en cosec.

Voor universeel gebruik in de landmeetkunde hebben we een zesdecimalige tafel noodig, hoewel we voor klein werk met een vijfdecimalige kunnen volstaan.

V. Op mijn verzoek heeft de samensteller opgenomen mijn tafeltje voor de oppervlakte van het cirkelsegment uit pijl en koorde en tevens op een los kwart vel de formules, die ik voor eenvoudige berekeningen noodig achtte.

Mijn oordeel over het geheele boek samengevat luidt: voor de school (afgezien van de misvatting omtrent de decimalen) *uitstekend;* voor klein werk in onze praktijk *voldoende.* De naam van den uitgever maakt opmerkingen over de typografische verzorging overbodig.

Ik ben in een zoo uitvoerige bespreking getreden, omdat ik de invoering van de decimale verdeeling met behulp van een goedkoope

tafel zoo belangrijk vind en omdat ik hoop, dat deze tafel spoedig gevolgd zal worden door een zesdecimalige voor de natuurlijke waarden....

F. Harkink c.i.
Landmeter van het Kadaster.

Bemerkungen anlässlich Dr. S. C. van Veens Kritik meines Buches „Die Brückenverbindungstheorie" (hier mit Br. zitiert) in „Euclides" Jg. XIII 1936/37 Nr. 4 S. 170—172.

Im Anfang seiner Kritik schreibt Dr. van Veen, dass er in meiner Definition der Aequivalenz zweier quadratischer Irrationalzahlen wenig mehr als eine Spielerei sehen kann, weil es nach dieser Definition in einem konkreten Falle a priori unmöglich ist zu untersuchen, ob zwei Irrationalzahlen in derselben Klasse liegen.

Ohne darauf einzugehen, was „a priori" hier bedeuten soll, will ich, genau der Entwicklung in Br. folgend, ein Beispiel anführen, wie zu entscheiden ist, ob zwei gegebene quadratische Irrationalzahlen mit der gleichen Determinante durch eine Brücke verbunden sind oder nicht, und wenn eine solche Brücke existiert, wie sie dann bestimmt wird.

Die zwei Irrationalzahlen seien $(86 + \sqrt{37})/33$ und $(-250 + \sqrt{37})/141$. Die regelmässige Kettenbruchentwicklung für jede dieser Irrationalzahlen ist resp.

$$\frac{86+\sqrt{37}}{33} \backsim 2,\ 1,\ 3,\ 0+\frac{\sqrt{37}+3}{7} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (1),$$

$$\frac{-250+\sqrt{37}}{141} \backsim -2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 2,\ 0+\frac{\sqrt{37}+3}{7} \quad . \ . \quad (2).$$

Sie haben denselben Periodenkreis, und gemäss Satz 4 in Br. Art. 7 gehören sie dann zu derselben Klasse. Die umgekehrte Brücke entsprechend (2) ist gemäss (G′) in Br. Art. 3:

$$\frac{\sqrt{37}+3}{7} \backsim 0,\ -2,\ -2,\ -1,\ -3,\ 2+\frac{-250+\sqrt{37}}{141} \quad . \ . \quad (3).$$

Aus (1) und (3) folgt:

$$\frac{86+\sqrt{37}}{33} \backsim 2,\ 1,\ 3,\ 0,\ -2,\ -2,\ -1,\ -3,\ 2+\frac{-250+\sqrt{37}}{141} \quad (4),$$

wodurch eine Brücke zwischen den zwei Irrationalzahlen bestimmt ist. Zur Ergänzung will ich noch zeigen, wie die (4) entsprechende normale Brücke bestimmt wird. Aus (4) ergibt sich mit den in Br. Art. 5 angewandten Bezeichnungen:

$y'_s/z'_s = -43/-18$, folglich $y_r/z_r = 43/18 \backsim 2, 2, 1, 1, 2, 1$ ($s = 8$, $r = 6$), und man erhält dann, indem $q_{r+1} + k = 1$ unmittelbar aus der Entwicklung folgt:

$$\frac{86+\sqrt{37}}{33} \backsim 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1+\frac{-250+\sqrt{37}}{141}.$$

Dieses Beispiel zeigt, dass mein Buch hinsichtlich dieser Frage eine sowohl erschöpfende als auch folgerichtige Darstellung gibt, und da Dr. van Veen in seiner folgenden Kritik anerkennt, dass meine Methode fähig ist, das Problem der Aequivalenz der binären quadratischen Formen zu lösen, ohne erst die Substitutionstheorie und die Theorie der reduzierten Formen zu entwickeln, so ist diese Seite der Sache ja in der schönsten Ordnung.

Dr. van Veen schreibt weiter, dass der Vorteil, der dadurch gewonnen ist, dass es nach meiner Methode nicht notwendig ist, die Substitutionstheorie und die Theorie der reduzierten Formen zu entwickeln, nicht den Verlust aufwiegt, der durch die Zerbrechung des Zusammenhangs mit den verwandten Gebieten der Zahlentheorie entsteht.

Dazu muss ich folgende Bemerkung machen: *Die durch die Brückenverbindungstheorie abgeleiteten Formeln (32) und (33) in Br. Art. 27 zeigen, dass die Substitutionstheorie gleichzeitig mit der Brückenverbindungstheorie bewiesen ist, und die Brückenverbindungstheorie braucht deshalb nicht die Zerbrechung des obengenannten Zusammenhangs zu verursachen.*

Bei der Ausarbeitung der Artikel 27 und 28 in Br. fand ich keinen Anlass, diesen Umstand besonders zu betonen, weil ich mir dachte, dass die in diesem Gebiet kundigen mathematischen Forscher dies ohne weiteres einsehen würden. Dem Anschein nach hat jedoch Dr. van Veen dies nicht eingesehen. Uebrigens will ich hier erläutern: Es war grade die Frage, ob es möglich wäre, zwei beliebige äquivalente Formen durch eine Substitution direkt in Verbindung zu setzen, die meine Entdeckung der Brückenverbindungstheorie verursachte.

Der letzte Teil der Kritik zeugt davon, dass Dr. van Veen gegen mein Buch sehr feindlich gesinnt ist, möglicherweise weil er in ihm nichts anderes als eine Ketzerei gegen die klassische Theorie sehen will, während er auf den Gedanken nicht gekommen ist, dass sich die Brückenverbindungstheorie bei vielen Untersuchungen der binären quadratischen Formen noch als ein wertvolles Hilfsmittel zeigen könnte. Da der Angriff hier nur aus Behauptungen ohne die geringsten Nachweise besteht, ist eine Entgegnung weder möglich noch erforderlich. Um die Art des Angriffes zu beleuchten, will ich nur ein Beispiel anführen.

Dr. van Veen schreibt: „De stijl laat alles te wenschen over, eenvoudige feiten en waarheden worden vertroebeld door een gewichtig aandoende, maar lastige, ongebruikelijke, symboliek, waardoor vele beschouwingen onnoodig gecompliceerd worden." Danach erregt es gewiss Erstaunen, wenn ich darauf hinweise, dass ich im ganzen Buch nur drei von mir eingeführte Symbole benutzt habe. So viel Symbolik, sollte man glauben, könnte ein zahlentheoretischer Forscher bewältigen! Demnach versteht man, dass Dr. van Veen, meiner Meinung nach, gar nicht kompetent ist, sich darüber auszulassen, ob es rätlich ist, mein Buch zu lesen oder nicht.

Dr. phil. L. C. Due.

Antwoord op het schrijven van Dr. Due.

Het voorgaand schrijven van Dr. Due kan ik uit de aard der zaak

niet onbesproken laten. Uit de behandelde voorbeelden (1) en (2) blijkt, dat deze schrijver *toch ook* een *regelmatige* kettingbreukontwikkeling wil gebruiken om een gegeven quadratisch irrationaal getal tot een gereduceerd q.i.g. te herleiden, om zoodoende tot de equivalentie van 2 voorgelegde q.i.g. te kunnen besluiten. Dit procedé is inderdaad volkomen juist en eenduidig bepaald. Deze methode wijkt dan echter in geen enkel essentieel punt af van de reeds sedert Lejeune-Dirichlet gevolgde klassieke methode om de equivalentie van 2 gegeven quadratische vormen (of van 2 q.i.g.) te onderzoeken. (zie b.v. Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, dritte Aufl. § 79—§ 83, Bachmann, Neuere Zahlentheorie, Zweite Aufl. Kap. V, § 13—§ 22).

Mijn bezwaar is nu juist, dat het mij, zelfs ondanks de hier voorafgaande uiteenzettingen van Dr. Due, niet gelukt is, in zijn werkje de explicite vermelding te vinden, dat hij inderdaad dit procedé met *regelmatige* kettingbreuken wenscht uit te voeren. Veeleer wordt in de heele opzet van hoofdstuk I de schijn gewekt, dat dit procedé in hooge mate voor generalisatie vatbaar is, n.l. door uitbreiding op *onregelmatige* kettingbreukontwikkeling. Ik moet daarom mijn oorspronkelijke bezwaren onverminderd blijven handhaven, dat daardoor het procedé in het algemeen *onbepaald* zal zijn, omdat men, uitgaande van 2 te onderzoeken q.i.g. langs die 2 onbepaalde wegen ook in het geval van equivalentie het gevaar loopt, nimmer in het gewenschte kruispunt (i.c. het gelijke gereduceerde q.i.g.) te arriveeren. Daarentegen zal men bij de sobere, klare klassieke methode (die de heer Due tenslotte toch ook toepast) in het laatste geval langs directe, vast afgebakende wegen onmiddellijk het beoogde doel bereiken. Het was mij natuurlijk niet ontgaan, dat er tenslotte voor den heer Due niets anders zou overschieten, dan deze weg te kiezen, en ik heb hierop in mijn bespreking de nadruk gelegd, in verband met de hoofdstelling op pag. 9 (Gauss, Disquisitiones Arithmeticae, art. 193).

Maar waarin schuilt dan eigenlijk het *moderne* in de beschouwingswijze van den heer Due, als de breed opgezette „Brückentheorie" tenslotte toch *moet* uitloopen op de gewone kettingbreuktheorie?

Niemand kan den heer Due het standpunt betwisten, om de equivalentie der quadratische *vormen* te bestudeeren met behulp van de q.i.g. En op zichzelf is dat geen nieuw standpunt, want het werd reeds in 1798 door Lagrange met succes gepropageerd (Additions aux éléments d'Algèbre d'Euler, II.) Hierdoor wordt inderdaad de theorie van de transformatie der quadratische vormen op de achtergrond geplaatst. Drie jaar later werd door Gauss in zijn Disq. Ar. juist deze laatste uiterst belangrijke theorie bij de studie der q.v. op de voorgrond geplaatst, waardoor de interessante kettingbreukbeschouwingen eenigszins in de schaduw bleven. Het behoort echter tot de onsterfelijke verdiensten van Lejeune-Dirichlet, dat hij heeft aangetoond, dat beide methoden, schijnbaar zoo verschillend in oorsprong, in wezen parallel loopen, waardoor de twee methoden tot een harmonisch geheel zijn versmolten. Ieder is het erover eens, dat de inwerking der kettingbreuktheorie op de theorie der quadr. vormen tot groote vereenvoudigingen heeft geleid, maar ik vrees, dat de heer Due toch

groote moeite zal hebben, om medestanders te vinden, die met hem de theorie van de transformatie bij de studie der q.v. geheel buiten beschouwing wenschen te laten.

Tenslotte vinden alle getallentheoretische onderzoekingen over q.v. hun oorsprong in de beide vragen: I. Welke q.v. kunnen een gegeven getal voorstellen? en II. Welke getallen kunnen door een gegeven q.v. bij veranderlijke x en ij worden voorgesteld?

De verdere behandeling van deze vragen voert onmiddellijk en noodzakelijk tot de transformatietheorie, de eerste vraag i.h.b. tot de transformatie der vormen in zichzelf en de equivalentie-theorie.

Amputeert men deze theorie, dan wordt hierdoor grootendeels het verband verbroken met al die interessante toepassingen, die de ziel van deze theorie vormen, zooals: ieder priemgetal van de gedaante $4h + 1$ is op één manier als de som van 2 quadraten te schrijven, evenzoo ieder priemgetal van de gedaante $3h + 1$ in de gedaante $x^2 + 3y^2$, en tal van andere dergelijke resultaten, om maar niet meer te spreken over de bepaling van het aantal klassen (daar dit niet meer tot de *elementaire* getallentheorie kan worden gerekend).

Ik heb hier expres over een „grootendeels" verbreken van dit verband gesproken, daar het mij ook wel bekend is, dat men langs een omweg, op meer gekunstelde wijze deze zelfde resultaten kan afleiden, b.v. met de theorie der kettingbreuken alleen, maar dat neemt niet weg, dat vragen van deze soort van nature thuisbehooren onder de substitutietheorie, en met behulp daarvan alleen een *ongedwongen* oplossing vinden.

Het was mij dan ook in 't geheel niet ontgaan, dat de schrijver tenslotte in § 27 bij de behandeling der equivalente q.v. nog een aanknoopingspunt vindt met de substitutietheorie, daar ook in deze behandeling het klassieke procedé wordt weergegeven. (Dirichlet-Dedekind § 73, Bachmann l.c. Kap. V. § 13 en § 20). Inderdaad vindt men op deze wijze *één* transformatie die de eerste q.v. in de daarmede equivalente q.v. overvoert, maar het voor de getallentheorie zoo belangrijke probleem, *alle* transformaties van dien aard te bepalen, kan zonder uitvoeriger gebruik van de substitutietheorie niet worden opgelost. De schrijver beweert daarom m.i. wel iets te veel, als hij zegt, dat in zijn boek de substitutietheorie gelijktijdig met de „Brückenverbindungstheorie" bewezen is. Wanneer men zich op het meer bescheiden standpunt plaatst, dat men zich reeds tevreden stelt met het aantoonen van de *mogelijkheid* van de transformatie van een q.v. in een daarmede equivalente q.v., kan ik mij tenslotte wel met de opvatting van den heer Due vereenigen, maar dan gaat een vergelijking met de veel rijkere resultaten der classici toch niet op, zooals de heer Due in zijn voorbericht wil suggereeren, door te zeggen „Beim Vergleich mit der gewöhnlich angewandten, von Gauss begründeten elementaren Theorie der binären quadratischen Formen, die sich z.B. in Dirichlet: Vorl. Zahlentheorie §§ 53—85, 145—148, 153 findet, wird man sehen, dass bei der von mir angewandten Methode sowohl die Substitutionstheorie als auch die Theorie der reducirten Formen vermieden wird, indem die ganze Entwicklung auf der Brückenverbindungstheorie aufgebaut ist" (heeft de heer D. hierbij ook Gauss, D. A. geraadpleegd?).

Tenslotte is het ook niet waar, dat de theorie der gereduceerde vormen geheel vermeden wordt. Wellicht bedoelt de heer D., dat hij *niet* de eminente beteekenis van de gereduceerde vorm (resp. haar surrogaat, n.l. het gereduceerde q.i.g.) als typische representant van een klasse van equivalente q.v. voldoende duidelijk naar voren brengt, maar het *begrip* gereduceerd q.i.g. (dat op pag. 9 eenigszins onverwacht uit de lucht komt vallen) wordt wel degelijk geregeld door den heer Due toegepast, waardoor deze handelwijze bedenkelijk veel lijkt op die van den man, die beweerde, een nauwkeurige cirkel te kunnen teekenen *zonder passer,* en die dit kunststuk volbracht door langs de omtrek van een gulden te teekenen.

De genoemde coupure van de substitutietheorie wreekt zich ook verder in § 28. Want vanzelfsprekend is de heer D. nu niet in staat, verschil te maken tusschen *eigenlijke* substitutie (substitutiedeterminant $= 1$) en *oneigenlijke* substitutie (substitutiedet. $= -1$), zooals in de officieele theorie gebruikelijk is. Daardoor verkrijgt de heer D. uit (volgens zijn definitie) equivalente q. i. g. quadratische vormen, die eventueel nog getallencomplexen van verschillend teeken kunnen voorstellen. Om nu hieruit een geschikte definitie voor equivalente q. v. af te leiden, moet hij deze afwijking als volgt corrigeeren. Hij zegt (§ 28) *Definition:* Zwei quadratische Formen gehören zur gleichen Klasse, wenn die entsprechenden Irrationalzahlen zur gleichen Klasse Irrationalzahlen gehören und die zwei quadratische Formen den gleichenden Zahlenkomplex darstellen.

Wanneer men daartegen het begrip „quadratische *vorm*" als primair beschouwt, dan zal men kunnen volstaan met:

Definition: Zwei quadr. Formen gehören zur gleichen Klasse, wenn sie den gleichen Zahlenkomplex darstellen.

Want het eerste gedeelte bij de eerste definitie is een *eigenschap,* die uit het laatste gedeelte kan worden afgeleid (D. D. § 73). Van dat standpunt bezien bevat de definitie bij Dr. Due dus overbodige elementen, en toch noemt hij deze definitie in zijn voorbericht „eine besonders hübsche Definition für die Aequivalenz der quadratischen Formen".

(Men vergelijke met § 28 van Due de, in tegenstelling hiermede, uiterst overzichtelijke, klare en sobere behandeling van dezelfde materie, langs essentieel dezelfde weg, bij Weber, Lehrbuch der Algebra, zweite Aufl. Bd. I, i. h. b. het tweede gedeelte van § 136).

Dat door de bovengeschetste dubbelzinnigheid bij de teekenbepaling nog nieuwe klassen aan de reeds bestaande worden toegevoegd, (door den schrijver antiklassen genoemd) waarvoor vanzelfsprekend in de klassieke theorie geen plaats is, kan moeilijk als een winst voor de wetenschap worden aangemerkt.

Toch begrijpt de schrijver mij verkeerd, als hij meent, dat ik zijn boek als een ketterij t. o. v. de klassieke theorie beschouw. Hij mag zich misschien hier en daar eenige kleine (boven nader omschreven) afwijkingen van de officieele theorie hebben geoorloofd, wij zagen echter ook, dat al deze afwijkingen bij verdere uitwerking uit zichzelf doodliepen; waar de schrijver zijn beschouwingen werkelijk verder kon doorvoeren, was hij genoodzaakt, naar de klassieke heirweg terug te keeren.

Daardoor is de hoofdinhoud van zijn boek in *wezen* klassiek, en ik zou daartegen niet het minste bezwaar kunnen maken, als de *vorm* niet zóó was, dat het de schijn wekt, alsof er iets geheel nieuws wordt opgedischt. De schrijver zoekt daarbij zijn kracht in tal van nieuwe benamingen (gedeeltelijk goed, gedeeltelijk minder gelukkig gekozen) voor begrippen, die reeds lang in de wetenschap vaststaande namen hebben gekregen.

(Voorbeeld „Brückenverbindung" voor „Kettenbruchentwicklung", „Amphibienklasse" voor „ambige (zweiseitige) Klasse", en nog ± 25 andere!)

Mijn bezwaren gelden meer de woordsymboliek, dan de teekensymboliek; inderdaad voert de schrijver slechts 3 nieuwe teekens in, en zelfs voor het tienvoudige aantal zou ik geen bepaalde vrees koesteren, als de noodzakelijkheid of de doelmatigheid daarvan ook maar aannemelijk zou gemaakt zijn. Maar welgeteld zijn er bij die 3 teekens minstens 2 teveel, die zonder eenig bezwaar door gewone gelijkteekens kunnen worden vervangen, mits men b.v. de gebruikelijke kettingbreuknotaties (Perron) volgt (zelfs wordt hier een apart teeken ingevoerd voor

D is van de vorm $an + b$, n.l. D ∽ $an + b$, pag. 14).

Overigens heeft Gauss het heele gebouw der elementaire getallentheorie kunnen oprichten onder invoering van slechts 1 nieuw symbool, maar dat dan ook zeer doelmatig gekozen was, en dit werd hem nog kwalijk genomen door Legendre, die toch wel onder de „zahlentheoretische Forscher" van groot formaat mag worden gerekend. Deze schreef in 1825 (Théorie des nombres, sec. supp. p. 12, noot) „Ces équations entre des restes provenant de la division de plusieurs nombres par un même nombre premier, se traitent comme des équations ordinaires, sans qu'il soit besoin des signes nouveaux d' égalité, ni des dominations nouvelles assez *incongrues* dont quelques géomètres font usage".

Deze invoering van woord- en teekensymboliek is een van de factoren, welke de studie van dit boek in hooge mate (en m. i. overbodig) verzwaren. Ik kan n.l. niet verhelen, dat het boek zeer lastig te lezen is. Verder schreef ik in mijn bespreking over de onduidelijke stijl. De schrijver stelt mij echter voor een te zware taak, als ik alle voorbeelden daarvan zou moeten citeeren, want dat zou neerkomen op het citeeren van een groot deel van het boek, en dat zou ook niet aan zijn doel beantwoorden door de vele nieuwe vaktermen, die dan ook nog verklaard zouden moeten worden. Er blijven mij dan slechts een paar zwakke voorbeelden over, welke niet overladen zijn door onbekende vaktermen, b.v. het begin van hoofdstuk II: „Wenn man eine Zirkelperipherie in n gleich grosse Teile teilt und in den Teilungspunkten in einer gewählten Umlaufsrichtung die Zahlen der Zahlenfolge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ anbringt in der Ordnung, in welche die Teilungspunkte sich folgen, so wollen wir diese Figur einen Zahlenkreis nennen, *indem wir festsetzen, dass der Zahlenkreis der gleiche ist, mit welcher Zahl wir auch beginnen, wenn wenn wir nur in der gleichen Umlaufsrichtung lesen*".

Wat hierin de preciese beteekenis van het cursieve gedeelte is,

wordt niet verder verduidelijkt (zooals m. i. dringend gewenscht ware) maar dit schaadt gelukkig de verdere ontwikkeling niet. Eenige regels verder lezen we:

Satz: In einem unzusammengesetzten Zahlenkreis kann er nur einen Symmetrie-Diameter geben und folglich nur zwei Wendepunkte.

Beter, althans duidelijker zou geweest zijn: kann es nur höchstens.. Ook de §§ 10, 29 en 30, hoewel geheel juist, munten allesbehalve uit door duidelijke, overzichtelijke stijl. Deze bezwaren worden mede veroorzaakt door de tweede, reeds vroeger genoemde factor, het algeheel ontbreken van getallenvoorbeelden, die bij deze theorie even slecht gemist kunnen worden als b.v. teekeningen in een boek over beschrijvende meetkunde. De schrijver zal hier misschien de opmerking maken, dat deze voorbeelden niet strikt noodzakelijk zijn, en theoretisch heeft hij gelijk, maar waar Gauss, Dirichlet en de andere grootmeesters het niet beneden zich hebben geacht om hun theoretische onderzoekingen op dit gebied met talrijke getallenvoorbeelden te verduidelijken, had Dr. Due toch ook op deze wijze de leesbaarheid van zijn boek aanmerkelijk kunnen verhoogen. Door samenwerking van deze factoren hebben verschillende redeneeringen een vorm verkregen, die bijna de ware klassieke inhoud niet meer laat herkennen, waardoor ze oppervlakkig de indruk van originaliteit wekken.

Descartes heeft zich voor de duistere verwarrende stijl van verschillende passages uit de „Géometrie" (Discours de la méthode) verontschuldigd door de opmerking, dat men anders beweren zou, dat er aan zijn ontdekkingen niets nieuws of belangrijks te bekennen viel. Bij de lezing van het werk van Dr. Due heb ik mij niet kunnen losmaken van de gedachte dat deze woorden ook hem voor den geest hebben gezweefd, al waren ze in dit geval minder gemotiveerd.

Een groote hinderpaal bij de studie van dit werk is tenslotte nog het geheel ontbreken van een alfabetische index, die bij deze vele nieuwe termen allesbehalve overbodige luxe zou zijn.

Is het na het voorgaande onverklaarbaar, dat een referent, die zich werkelijk de grootste moeite getroost om door al deze bezwaren heen te worstelen, en die tenslotte zijn moeite zoo slecht beloond ziet, daar hij onder de schijn van originaliteit niets wezenlijk nieuws, zelfs geen vereenvoudigde gedachtegang vermag aan te treffen, (veeleer het tegendeel) zich geirriteerd toont?

Ik meen hiermede uitvoerig bij alle punten van het betoog van den heer Due te hebben stilgestaan, de laatste zin van zijn betoog natuurlijk uitgezonderd, want daarop kan ik moeilijk nader ingaan. Wat deze laatste zinsnede betreft, meen ik te moeten volstaan met het uitspreken van de hoop, dat het den heer Due moge gelukken, een meer competente criticus aan te treffen, die na niet minder ernstige bestudeering van zijn boek tot een gunstiger eindconclusie moge komen.

Toch wil ik erkennen, dat ik op één punt misgetast schijn te hebben, n.l. wat betreft de lezerskring tot welke de schrijver zich wendt.

De inrichting van het werk had mij doen vermoeden, dat het boek bestemd was in hoofdzaak voor hen, die van deze problemen nog geen onderwerp van studie hadden gemaakt. Enkele punten in het laatste

gedeelte van het betoog van Dr. Due doen echter vermoeden, dat zijn boek bestemd is voor meer deskundige lezers, (m. i. zou dan echter de publicatie van zijn werk in een wetenschappelijk tijdschrift meer op zijn plaats zijn geweest). Wanneer dit werkelijk de bedoeling is, dan zou daarmede een gedeelte van mijn bezwaren tegen de *didactische* waarde van zijn boek komen te vervallen.

Het is te betreuren, dat Dr. Due, die toch in tal van gedeelten van zijn boek blijk geeft van veel routine en degelijke kennis bij de behandeling van moeilijke problemen der elementaire getallentheorie, in zijn plannen te hoog heeft gegrepen, en daardoor zijn werk deze minder geschikte vorm heeft gegeven. Had hij eenvoudig volstaan met een sobere, maar duidelijke reproductie der klassieke onderzoekingen, dan zouden wij hem reeds dankbaar geweest zijn voor het feit alleen, dat hij deze belangrijke problemen (die helaas te zelden bestudeerd worden) weer eens onder de aandacht van de daarvoor geinteresseerden had willen brengen.

Dordrecht, 12 November 1937.

S. C. van Veen, Dubbeldamscheweg 214.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van P. NOORDHOFF, Groningen—Batavia.

J. C. OLIJ, *Honderd vraagstukken over levensverzekeringswiskunde,* opgegeven bij de examens 1927—1936, met examenprogramma, litteratuurlijst, uitgewerkte oplossingen en tafels. 93 blz. . . . . f 1,90

NOORDHOFF's *Tafel in 4 decimalen.* **6e—10e duizendtal,** 88 blz., in slap linnen, geb. . . . . f 1,—

INHOUD. Blz.

COMPOSITIO MATHEMATICA.
Vol. 4, Fasc. 2, 18 Maart 1937.

INHOUD. Blz.

Vol. 4 Fasc. 3, 25 Juli 1937.

P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET, *Logarithmen- en rentetafels uitgave G, Schooluitgave van tafel E voor de H.B.S.* **A.** 95 blz., groot formaat, in slap linnen *f* 1.60

INHOUD. Blz.

Bijtafels.

BLADVULLING.

Bij de oplossing van het tweede algebravraagstuk van het eindexamen der hoogere burgerscholen B in 1936 moet gebruik gemaakt worden van de verwisselbaarheid van logarithmenemen en limietovergang. [1]) Deze stelling komt in de schoolboeken niet voor; daarom volgt hier een bewijs, waarbij wij ons beperken tot logarithmen bij een grondtal grooter dan 1.

Ondersteld: $g > 1$; $a_n > 0$ voor elke natuurlijke waarde van n, $\lim a_n = A$; $A > 0$.

Gesteld. $\lim {}^g\log a_n = {}^g\log A$.

Bewijs. Zij gegeven een positief getal ε; nu moet bewezen worden, dat er een getal p bestaat, zoodat voor elke waarde van n, grooter dan p,

$$| {}^g\log a_n - {}^g\log A | < \varepsilon, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

of

$$\left| {}^g\log \frac{a_n}{A} \right| < \varepsilon,$$

---

[1]) Zie ook P. Wijdenes, Middel-Algebra, 2e druk, blz. 462, waarbij bewezen wordt $\lim_{n=\infty} \lg c_n = \lg \lim_{n=\infty} c_n$; ($c_n$ is een variant); zie ook blz. 490.

of

$$-\varepsilon < {}^{g}\log \frac{a_n}{A} < +\varepsilon,$$

of, daar $g > 1$ is

$$g^{-\varepsilon} < \frac{a_n}{A} < g^{+\varepsilon},$$

of, als wij ter bekorting g^{ε} door m voorstellen (m is dan grooter dan 1)

$$\frac{1}{m} < \frac{a_n}{A} < m,$$

of, daar $A > 0$ is

$$\frac{A}{m} < a_n < Am.$$

$$a_n > \frac{A}{m}$$

$$a_n - A > \frac{A}{m} - A$$

$$a_n - A > -A\frac{m-1}{m}$$

$$A - a_n < A\frac{m-1}{m} \qquad (2)$$

Hierin is $A\frac{m-1}{m} > 0$. Volgens het ondersteldе is er een getal p_1, zoodat voor elke waarde van n grooter dan p_1

$$| a_n - A | < A\frac{m-1}{m}.$$

Dus is, als $a_n - A < 0$ aan (2) voldaan voor $n > p_1$; als $a_n - A \geqq 0$ is vanzelf aan (2) voldaan.

$$a_n > Am$$

$$a_n - A < A\,(m-1 \qquad (3)$$

Hierin is $A\,(m-1) > 0$. Volgens het ondersteldе is $\lim a_n = A$, dus er is een getal p_2, zoodat voor iedere waarde van n, die grooter is dan p_2

$$| a_n - A | < A\,(m-1).$$

Dus is, als $a_n - A > 0$ aan (3) voldaan voor $n > p_2$; als $a_n - A \leqq 0$ is vanzelf aan (3) voldaan.

Kiest men een getal p, dat niet kleiner is dan p_1 en niet kleiner dan p_2, dan is voor iedere waarde van n, die grooter is dan p, voldaan aan (2) en aan (3), dus aan (1). Daar deze redeneering geldt voor iedere positieve waarde van ε, is het gestelde bewezen.

J. H. S.

HISTORISCHE STUDIËN XX

DOOR

Prof. Dr Hk. DE VRIES.

Motto: *Historia sapientia ipsa est.*

GASPARD MONGE, OPVOEDER VAN GEHEEL EEN VOLK.

Inleiding.



Voor den eenvoudigen werkman in den wijngaard der Mathesis is het verheffend, over Monge te mogen schrijven, zooals het voor anderen een voorrecht moet zijn, te mogen schrijven over Rembrandt; want alles was groot aan dien man. Zelfs zijn lichaamsafmetingen waren buitengewoon. En zijn karakter was als een edelsteen van het zuiverste water; nergens was er een vlekje te bekennen. Kleinzieligheid, benepenheid, ijdelheid, egoïsme, zucht naar eer of roem, om van geldzucht maar te zwijgen, alles

was hem vreemd. Van nature hartstochtelijk, werd hij doorgloeid door een brandende liefde voor zijn land, zijn volk, en de wetenschap, en voor deze drie heeft hij, volmaakt belangeloos, geleefd. Als een reus is hij door het leven en door de wetenschap geschreden, en zijn invloed is enorm geweest; hij is in den letterlijken zin des woords de voorganger en opvoeder van zijn geheele volk geweest, en dat in den verschrikkelijksten tijd dien zijn land heeft gekend; toen het van binnen verscheurd werd door de Revolutie, en van buiten aan alle kanten door vijanden bedreigd. Toen kon men hem 's morgens in de vroegste vroegte, met zijn boterhammen in een papier gewikkeld onder den arm, zijn huis zien verlaten, en zijn schreden richten naar de verschillende geschutgieterijen, geweer- en kruitfabrieken van Parijs, overal de menschen aanvurende, overal voorlichting en raad gevende, overal vertrouwen op de toekomst predikend; en wanneer hij 's avonds laat thuis kwam, dan werkte hij verder aan zijn „Description de l'art de fabriquer les canons" (Paris, an II, d.i. 1793), die voor de directeuren der fabrieken als leiddraad moest dienen. Hij was de constructeur van de kneus- en maalmachines, die men plaatste in de kruitfabriek van Grenelle, een wijk van Parijs, en van de geschutboorderijen, ingericht op schepen in de Seine. Slechts een man van het buitengewone maaksel van Monge kon zulk een leven geruimen tijd volhouden. Hij kende zijn volk door en door, want hij was zelf een man uit het volk; tegenover den eenvoudigsten werkman wist hij den juisten toon te treffen, zoodat hij door ieder, die met hem in aanraking kwam, werd verafgood. Hij had de ellende van de standverschillen en kastenvooroordeelen, zooals zij woekerden in de dagen van het „ancien régime": adel, geestelijkheid en „tiers état", aan den lijve ondervonden, want hij was zelf voortgekomen uit den „tiers état", en had alle vernederingen door moeten maken, waarmede de beide bevoorrechte standen, vooral de adel, zoo scheutig waren. Wat wonder dat hij met hartstocht de Revolutie omhelsde, en in haar het ochtendgloren van een nieuwen, en beteren, dag meende te aanschouwen; de excessen, de terreur, de heerschappij der guillotine, kon ook hij niet voorzien. Trouwens, alle goede daden vinden toch immers van zelf hunne belooning? Als hij zich niet bij tijds in veiligheid had weten te brengen, en een tijd lang schuil houden, dan had ook hij, evenals de groote chemicus Lavoisier en de, vooral historisch, verdienstelijke

astronoom B a i l l y, de treden van het schavot moeten beklimmen; men zocht hem, „il était dénoncé comme suspect"! Hij, de edelste mensch, en de beste Franschman die er ooit geweest is, was „suspect"! Gelukkig kon hij zich, toen de razernij eindelijk geweken was, weer vrijelijk op straat vertoonen; maar aan het geheele voorval zal de Franschman van heden toch waarschijnlijk maar liever niet herinnerd worden.

1. M o n g e is geboren den 10en Mei 1746, in het allerliefste fransche provinciestadje en gewezen vesting B e a u n e, 38 K.M. ten Zuiden van Dijon, Côte d'Or, Bourgogne, het hart van het wijnland, waar men bijna even goed met de wijnkaart als met het spoorboekje kan reizen. B e a u n e is de hoofdplaats van het district, en „Beaune" zelf is een gerenommeerd merk. Het spoorwegstation is een tien minuten gaans van het stadje verwijderd, en indien men den breeden, rechten weg wandelt die beide verbindt, dan ziet men aldra de prachtige oude platanen op de wallen, die de stad nog ten deele omgeven. Leven doet Beaune van den wijn, en de geheele handel, de koop en de verkoop, spelen zich af in de kelders en lokalen van het onvergelijkelijk schoone en interessante „Hôtel Dieu", ziekenhuis annex rusthuis voor ouden van dagen, dat stamt uit de 15e eeuw, en waar de traditie angstvallig bewaard wordt, zoodat bijv. de religieuses, de pleegzusters, nog hetzelfde costuum dragen als in veertien honderd zooveel, en in de apotheek nog dezelfde pullen en vijzels in gebruik zijn als in de 15e eeuw. Ook bij den verkoop van den wijn worden de oude gebruiken angstvallig in eere gehouden, en de afslager is een persoon van gewicht.

De inrichting is in 1443 gesticht door den Chancelier Rollin, belastingpachter, en dus uitzuiger van den minderen man, van wien gezegd is dat hij slechts zijn plicht gedaan heeft door deze prachtige behuizing te stichten, waar ouden van dagen rust en verpleging konden vinden, nadat hij hen immers vroeger geruïneerd had! Op een der binnenplaatsen vindt men de standbeelden van Meneer en Mevrouw, meer dan levensgroot. Ik vrees zeer, dat Meneer ze daar zelf maar heeft laten zetten, want zijn dankbare protégés zullen het wel niet gedaan hebben! Die hadden er trouwens ook het geld niet voor, daarvoor had hij zelf wel gezorgd!

2. Er is in B e a u n e een pracht van een marktpleintje, omgeven door oude, door geen moderniseeringswoede verknoeide,

huizen. Het midden ligt een weinig hooger dan de rest, is bedekt met grint, en wordt langs de twee lange kanten begrensd door een rij keurig gesnoeide boomen. Het geheel wordt afgesloten door den sierlijken „beffroi", den klokketoren, en als men zich nu aan de voorzijde van het standbeeld van M o n g e plaatst, dan heeft men den beffroi als achtergrond.

De groote man is afgebeeld in de kracht van zijn leven, en nog met het staartpruikje op. De rechter arm is gebogen, en wijsvinger en duim raken elkaar aan; de houding, die hij placht aan te nemen bij het doceeren. Op het voetstuk staat niets anders dan: „A Gaspard Monge, ses amis, ses élèves", en het geheel maakt daar, in die stille en stemmige omgeving, een diepen indruk.

Niet ver van de markt staat het geboortehuis, nog in uitstekenden staat, zooals alles wat men in het welvarende Beaune te zien krijgt. Het bevindt zich, begrijpelijkerwijze, in de Rue Monge, maar deze straat heette in 1746 de Rue Couverte. Het is schrijver dezes, ook bij navraag bij de inwoners, niet mogen gelukken de beteekenis van dat woord „Couverte" te leeren kennen, want er is daar niets „bedekts" te bekennen. De straat heeft een zeer behoorlijke breedte, en de fraaie, massieve, oude huizen gaan, met verscheidene verdiepingen, ongestoord de hoogte in. Het eigenlijke geboortehuis draagt niet één, maar twee gevelsteenen; behalve M o n g e is daar nl. nog geboren de schilder Z i e m, die daar in de streek een grooten naam heeft.

Behalve de pui van het winkelhuis aan de straat, die, zonder in het minst het geheel te schaden, gemoderniseerd is (er is een opticien in gevestigd), is alles nog in den ouden staat. Naast het huis is een steeg, en daarin bevindt zich een massieve deur, die toegang geeft tot de binnenplaats; en op die binnenplaats ziet men nog de oude, donker rood geschilderde, verweerde, houten trap, zoo karakteristiek voor de huizen daar uit de streek, die naar de verschillende verdiepingen voert. Op één daarvan woonde in den jare 1746 de eenvoudige, maar door en door degelijke, rondreizende koopman J a c q u e s M o n g e, een van die mannen die men ook thans nog wel, hoewel sporadisch, ontmoet, en die door hun helder en nuchter verstand, hun scherpen blik, en hun juist oordeel over menschen en toestanden, hun gemis aan ontwikkeling wonderwel weten te neutraliseeren. Deze voortreffelijke man dan werd den 10en Mei 1746 verblijd door de geboorte van zijn eerste-

ling G a s p a r d, en later heeft hij er nog twee jongens bij gekregen. Ook dezen zijn opgegroeid tot flinke menschen; maar ja, G a s p a r d was nu eenmaal een genie, en zij niet. Onder zulke omstandigheden wordt concurreeren onmogelijk!

3. Vader M o n g e 's grootste zorg was, zijn jongens een opvoeding te verschaffen die hij zelf gemist had, en zoo zond hij hen dan naar de zoogenaamde „Oratoriens" van B e a u n e, broeders van een geestelijke orde, die blijkbaar goed, en verzorgd, onderwijs gaven. Hier verbaasde hij op 14-jarigen leeftijd zijn omgeving door de constructie van een brandspuit, en op 16-jarigen door een plattegrond van het heele stadje, door hem opgenomen met zelf vervaardigde instrumenten, en meesterlijk geteekend, want ook zijn aanleg voor lijnteekenen was buitengewoon. „Il fit hommage de son travail à l'administration de sa ville natale, qui récompensa le jeune auteur aussi généreusement que pouvaient le permettre les moyens bornés de la richesse communale", zegt zijn leerling en neef B r i s s o n in het *Avertissement* van de 4e editie van de „Géométrie descriptive", uit het jaar 1820, die door hem verzorgd is. Deze plattegrond zou voor zijn heele toekomst beslissend worden.

De mare van zijn buitengewone gaven was doorgedrongen tot de Oratoriens van Lyon, en dezen aarzelden niet hem het onderwijs toe te vertrouwen in de Natuurkunde, die hij zelf pas in het afgeloopen jaar geleerd had. Zij trachtten hem ook voor hun orde te winnen, maar vader J a c q u e s, aan wiens oordeel hij groote waarde hechtte, ontried hem dit, en gaf hem den raad de hulp te aanvaarden van een luitenant-kolonel der genie, die vol bewondering voor den plattegrond van B e a u n e gestaan had, en aanbood den jongen een plaats te bezorgen in de school van het corps der genie te M é z i è r e s, aan de Belgische grens.

Dit nu was niet zoo mooi als het leek. Niet ieder was waardig den degen te dragen, daarvoor was noodig dat de aspirant-leerling kon aantoonen dat zijn ouders en voorouders „vivaient, ou avaient vécu, noblement", d.w.z. zonder iets uit te voeren, en dit kon G a s p a r d natuurlijk van den braven marskramer uit B e a u n e bezwaarlijk bewijzen. Nu waren er, hoe verachtelijk dit ook mocht wezen, van het slag van vader J a c q u e s, die met werken zijn brood verdiende, in plaats van te leven van het uitzuigen van zijn pachters en dgl., natuurlijk meer, en daarom telde de school te

Mézières twee afdeelingen, een voor de „nobles", en een andere, door de leerlingen der eerste smalend de afdeeling van de troffel genoemd (de la gâche), voor den minderen man. Hier werd men opgeleid tot practicus, tot opzichter, tot teekenaar, enz., en hier vond Monge van zelf sprekend zijn plaats. Hij werd aangenomen als leerling, maar tevens, om zijn werkelijk verbluffenden aanleg voor lijnteekenen, aangesteld als teekenaar.

Hier heeft hij in den beginne kwade dagen beleefd. Hij voelde zijn kracht, en ergerde er zich geweldig aan dat men slechts oog had voor zijn vaardigheid als teekenaar. „J'étais mille fois tenté", placht hij vele jaren later te vertellen, „de déchirer mes dessins, par dépit du cas qu'on en faisait, comme si je n'eusse pas été bon à produire autre chose."

Maar het genie is niet te stuiten; het breekt door alle hindernissen en vooroordeelen heen. Op een goeden dag was hem het uitwerken opgedragen van een geval van „défilement", d.w.z. het aanleggen, in de vlakte of in bergachtig terrein, van een vesting, zoo goedkoop mogelijk, en zóó, dat het vijandige geschut er zoo min mogelijk vat op had.

Dit vraagstuk werd van oudsher opgelost rekenenderwijze, en eischte dan een oneindig gecijfer; en nu kwam Monge op het idee die lange, en vervelende berekeningen, te vervangen door grafische constructies. *En zóó werd, en uit dit vraagstuk, de Beschrijvende Meetkunde geboren.* „Monge abandonna la route suivie jusqu'alors, et découvrit la première méthode géométrique et générale qu'on ait donnée pour cette importante opération . . . : En appliquant successivement son talent mathématique à diverses questions d'un genre analogue, et généralisant toujours ses moyens de concevoir et d'opérer, il parvint enfin à former un corps de doctrine; ce fut sa Géométrie descriptive". Dit was dus omstreeks het jaar 1765.

Monge was met zijn werk klaar ongeveer in denzelfden tijd, dien een rekenaar noodig gehad zou hebben om zijn gegevens te rangschikken en behoorlijk te beginnen, en de commandant der school was verbaasd, maar tevens ontstemd. „Ik wil gelooven aan buitengewone gaven, maar ik geloof niet aan wonderen", en hiermede wilde hij het werk ongezien terug geven. Maar Monge was er toen al de man niet naar om uit den weg te gaan. Hij drong er op aan dat de commandant hem de gelegenheid zou geven

zijn constructies toe te lichten, en deze, bekeerd, eindigde met tòch maar aan het wonder te gelooven! Maar nu sloeg hij over naar den anderen kant. De nieuwe methode moest het geheim blijven van de school, en mocht in ieder geval onder geen voorwaarde haar weg vinden naar het buitenland; dus legde hij Monge de striktste geheimhouding op, en zoo heeft het dan geduurd tot 1794, vóórdat Monge de gelegenheid kreeg zijn Beschrijvende Meetkunde voor te dragen!

Wij zullen de vraagstukken van het „défilement" in de „Géométrie descriptive" terug vinden, en er dan een oogenblik bij stilstaan.

4. Het genie is niet te stuiten, schreven wij hierboven. Monge werd benoemd tot „Répétiteur de Mathématiques et de Physique" aan zijn eigen school, ten einde de professoren Nollet en Bossut te assisteeren, en weldra werd hij „professeur titulaire" (1768); en toen hadden de jongens, wier ouders „vivaient noblement", het onderwijs te ondergaan van den man van de „troffel"!

Wij lezen niets van moeilijkheden of onaangenaamheden, integendeel! De jongens waren natuurlijk van inborst niet zoo slecht als hunne omgeving, en de tijd waarin zij leefden, hen trachtten te maken, en konden aan den magischen invloed, die blijkbaar toen reeds van dezen wonderman uitging, geen weerstand bieden. „Il tourna ses vues vers l'étude d'une foule de phénomènes de la nature; il fit de nombreuses expériences sur l'électricité; il expliqua les phénomènes qui se rapportent à la capillarité, fut le créateur d'un système ingénieux de Météorologie; *il opéra la composition de l'eau!!* Il arriva à cette grande découverte sans avoir eu connaissance des recherches un peu antérieures de Lavoisier, Laplace, et Cavendish. Il ne se contentait pas d'expliquer aux élèves, dans les salles d'étude, les théories de la science et leurs applications; il aimait à conduire ses disciples partout où les phénomènes de la nature et les travaux de l'art pouvaient rendre sensibles et intéressantes ces applications. Il communiquait à ses disciples son ardeur et son enthousiasme, et changeait en plaisirs passionnés des observations et des recherches qui, dans l'enceinte d'une salle et par des considérations abstraites, n'eussent paru qu'une pénible étude".

Dat wil dus zeggen, dat Monge reeds omstreeks zijn 20e, 25e jaar een groot en veelzijdig geleerde, en een onweerstaanbaar en meeslepend docent was. Toch was hij geenszins een geboren

redenaar; integendeel. Zonder bepaald te stotteren, had hij toch moeite met enkele letters; en als hij deze overwonnen had, dan vloog de rest van den zin zijn mond uit, als werd hij er uit geschoten. Niettemin wist hij zijn toehoorders compleet te electriseeren, en tot laaiend enthousiasme te brengen.

Men voelt dat een man van zijn qualiteiten niet opgesloten kon blijven binnen den engen, en excentrischen, kring van Mézières; zonder er zelf een stap voor te verzetten, moest hij noodwendig terecht komen in het hart van Frankrijk, Parijs; de (gedeeltelijke) overgang had plaats in 1780.

Turgot had in het Louvre een leerstoel opgericht voor hydrodynamica, en deze was bezet door Bossut. Monge nu werd aangewezen ook hier Bossut te assisteeren (men ziet dat hij alles doceerde wat men van hem verlangde!), en om nu te maken dat hij zijn beide functies, nl. te Parijs en te Mézières, tegelijk zou kunnen waarnemen, werd bepaald dat hij telkens een half jaar in de éene, en een half jaar in de andere stad zou doorbrengen.

In 1783 stierf de groote mathematicus, en beroemde „examinateur de la Marine" Bezout, bekend aan ieder, die in de Hoogere Algebra de theorie der vergelijkingen bestudeert; Monge werd zijn opvolger en verhuisde nu voor goed naar Parijs. De markies de Castries drong er meer dan eens bij hem op aan, dat hij een nieuwen „Cours élémentaire de Mathématiques pour les élèves de la Marine" zou schrijven, maar Monge weigerde. „Made. Bezout", zoo sprak hij, „heeft geen ander inkomen dan de geschriften van haar echtgenoot, ik wil de weduwe van den man, die groote diensten bewezen heeft aan de wetenschap en het vaderland, niet het brood uit den mond nemen." Het eenige elementaire boek, dat hij geschreven heeft, was een „Traité élémentaire de Statique."

5. Wij moeten enkele jaren teruggaan. Wij zagen in § 3 dat wij het geboortejaar der Beschrijvende Meetkunde ongeveer kunnen stellen op 1765; welnu, de jaren van 1765 tot 1780 zijn voor Monge beslissend geweest; in die jaren is hij uitgegroeid van hoopvol jongeling tot grootmeester in de exacte wetenschappen; en heeft hij den grond gelegd voor zijn onsterfelijkheid. Wij zagen reeds dat hij in de Mechanica, Physica, Chemie, en Meterologie, een wijd gebied overzag, maar in zijn hoofdvak, de Wiskunde;